



# تبدیل فوریه سریع

Fast Fourier Transform (FFT)

تهیه کننده: علیرضا علی حسینی

شرکت مهندسی سورین توربوماشین

## فهرست

- ۱-مقدمه‌ای بر تبدیل فوریه ..... ۱
- ۱-۱-درآمدی بر تبدیل فوریه ..... ۲
- ۱-۲-آشنایی با تبدیل ..... ۳
- ۲-تبدیل فوریه..... ۵
- ۲-۱-توابع پایه..... ۶
- ۲-۲-تبدیل فوریه..... ۷
- ۳-تبدیل فوریه‌ی گسسته ..... ۱۱
- ۳-۱-مقدمه..... ۱۲
- ۳-۲-گذر از حالت پیوسته به حالت گسسته..... ۱۲
- ۳-۳-پنجره‌ای کردن و نمونه‌برداری..... ۱۳
- ۳-۴-قضیه‌ی نمونه‌برداری..... ۱۸
- ۳-۵-کارکردهای DFT بر روی داده‌های نمونه‌برداری ..... ۱۹
- ۴-تبدیل فوریه سریع..... ۲۲
- ۴-۱-مقدمه‌ای بر تبدیل فوریه‌ی سریع ..... ۲۳
- ۴-۲-کاربردهای تبدیل فوریه‌ی سریع ..... ۲۴
- ۴-۳-روش تبدیل فوریه سریع..... ۲۷
- ۴-۴-فرمولاسیون ماتریس..... ۲۸
- ۴-۵-بررسی شهودی..... ۲۹
- ۴-۶-نمایش گرافیکی سیگنال-جریان ..... ۳۴

|    |                                                              |
|----|--------------------------------------------------------------|
| ۳۷ | ۴-۷-گره های دوگانه.....                                      |
| ۳۷ | ۴-۷-۱-گره های میان گره های دوگانه:.....                      |
| ۳۸ | ۴-۷-۲-محاسبه گره های دوگانه:.....                            |
| ۴۰ | ۴-۸-مشخص کردن $W^P$ .....                                    |
| ۴۱ | ۴-۹-مرتب کردن FFT.....                                       |
| ۴۳ | ۴-۱۰-فلو چارت محاسبه FFT.....                                |
| ۴۷ | ۴-۱۱-برنامه کامپیوتری FFT توسط زبان های پاسکال و بیسیک:..... |
| ۵۱ | ۴-۱۲-بررسی نظری اساس الگوریتم FFT.....                       |
| ۵۱ | ۴-۱۲-۱-تعریف موضوع.....                                      |
| ۵۲ | ۴-۱۲-۲-فاکتور گیری $W^P$ .....                               |
| ۵۶ | ۴-۱۳-الگوریتم کولی - توکی برای $N = 2^r$ .....               |
| ۵۹ | مراجع.....                                                   |

## فصل اول

# مقدمه‌ای بر تبدیل فوریه

## ۱-۱- درآمدی بر تبدیل فوریه

پس از آنکه در سال ۱۸۰۷ میلادی، ژان باتیست ژوزف فوریه دستاوردهای خود در مورد استخراج حل معادلات اساسی انتشار حرارت را با استفاده از روش ابداعی خود به کمک بسط توابع مثلثاتی به آکادمی علوم فرانسه ارائه نمود، کمیته‌ای از ریاضیدانان نامی همچون لاپلاس، لاگرانژ و پواسون آن را بررسی و در دو زمینه مورد حمله قرار دادند.

در مورد اول، اعتبار ریاضی این سری جدید مورد تردید واقع شد، چراکه ظاهراً لاپلاس نمی‌توانست باور کند که بتوان تابع  $\cos(x)$  را با بسط‌های توابع سینوسی توصیف نمود. در مورد دوم، کاربردهای این روش با وجود روش‌های قدیمی‌تر دیگری همچون بسط‌های سری‌های توانی و ... مورد سؤال واقع شد.

از آن زمان تاکنون، اثبات‌های بسیاری در مورد اعتبار فوریه ارائه شده است. علاوه بر آن، با اختراع کامپیوترهای رقمی و الگوریتم‌های مؤثر محاسباتی، کاربردهای بسیاری در زمینه‌های علوم و فناوری برای روش‌های فوریه ابداع شده‌اند، به گونه‌ای که در طول قرن گذشته، تبدیل فوریه به یکی از ابزارهای بسیار مهم و مفید برای ریاضیدانان، فیزیکدانان و مهندسين تبدیل شده است.

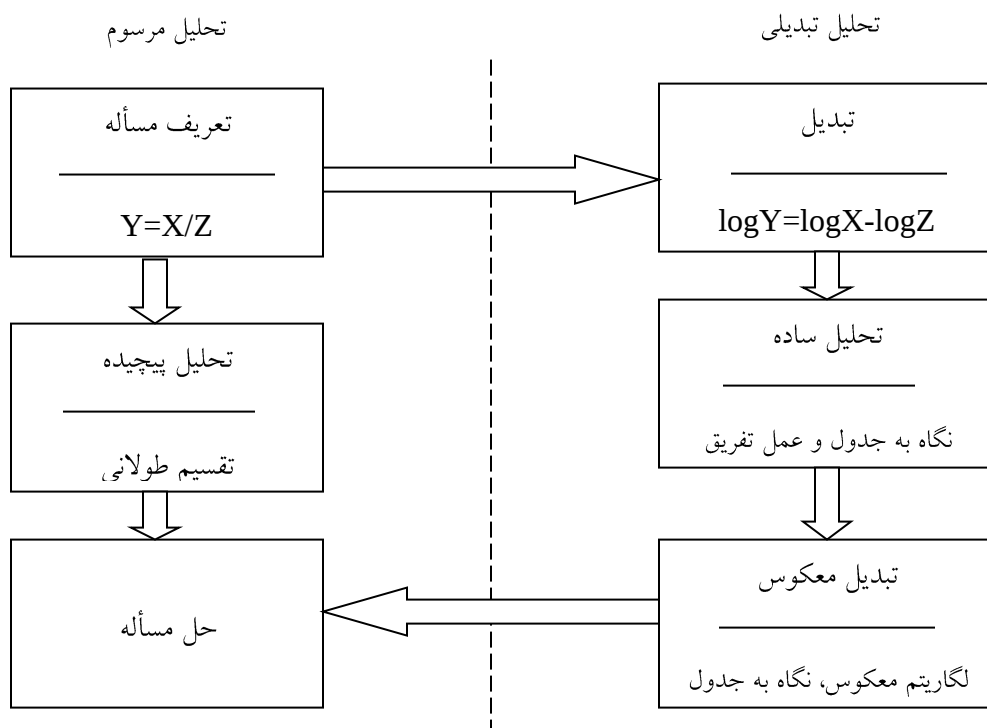
تبدیل فوریه در زمینه‌های کاملاً متفاوتی مانند ستاره‌شناسی با استفاده از امواج رادیویی، کریستالوگرافی، اسپکتروفتومتری، موسیقی و زمینه‌های گوناگون دیگری کاربرد دارد.

حقیقت آن است که حتی بسیاری از افرادی نیز که دانش کافی نسبت به اساس تئوریک تبدیل فوریه در زمینه‌های گوناگون ندارند، مطمئناً از درک عمیق مفهوم تبدیل فوریه بهره‌ی فراوانی خواهند جست. به همین دلیل، حتی پس از گذشت حدود ۲۰۰ سال از اولین ارائه‌ی آن، هنوز نیاز به رمزگشایی از تبدیل فوریه و نمایش کاربردهای عملی آن ضروری به نظر می‌رسد.

## ۲-۱- آشنایی با تبدیل

هر خواننده‌ای، زمانی برای ساده کردن حل مسائل، از تکنیک تبدیل استفاده کرده است. ممکن است در ذهن خواننده صحت این عبارت مورد تردید واقع گردد، زیرا عبارت **تبدیل**، توصیف آشنایی برای تحلیل مسائل نیست، اما باید به یاد داشت که **لگاریتم**، تبدیلی است که همه ما به نحوی از آن استفاده کرده‌ایم.

برای توضیح بیشتر، در شکل (۱-۱) نموداری نشان داده شده است که رابطه‌ی بین تحلیل‌های مرسوم و تحلیل تبدیلی را نشان می‌دهد. در این نمودار مثال ساده‌ای از یک تبدیل لگاریتمی نشان داده شده است. ما از این مثال به عنوان روشی برای رساندن مفهوم عبارت تحلیل (آنالیز) تبدیلی استفاده می‌کنیم. مسأله‌ی مورد نظر در شکل (۱-۱)، تعیین عبارت  $Y=X/Z$  با فرض نبود کامپیوتر و نیاز به دقت بالا، می‌باشد. آنالیزهای مرسوم ایجاب می‌کند که برای بدست آوردن  $Y$  باید از تقسیم دستی استفاده کنیم. اگر لازم باشد که این محاسبات برای چندین  $Y$  انجام شود آنگه، تحلیل‌های مرسوم نیازمند صرف زمان زیاد می‌باشد.



شکل (۱-۱): رابطه‌ی بین تحلیل‌های مرسوم و تحلیل تبدیلی

در قسمت راست شکل (۱-۱)، مراحل اصلی تحلیل تبدیلی نشان داده شده است. همانطور که از نمودار مشخص است، گام اول، تبدیل عبارت مسأله می‌باشد. در این مثال، ما لگاریتم را برای تبدیل تقسیم به تفریق استفاده کرده‌ایم.

به خاطر این ساده‌سازی، نیاز به جدولی خواهیم داشت که بتوان از آن  $\log(X)$  و  $\log(Z)$  را یافت و با کم کردن  $\log(Z)$  از  $\log(X)$  مقدار  $\log(Y)$  را بدست آورد. در گام بعدی، با تبدیل معکوس (لگاریتم معکوس)  $\log(Y)$  و با کمک جداول، مقدار  $Y$  را پیدا می‌کنیم. بنابراین، با استفاده از تکنیک تحلیل تبدیلی، پیچیدگی مسأله را در این مثال کاهش داده‌ایم.

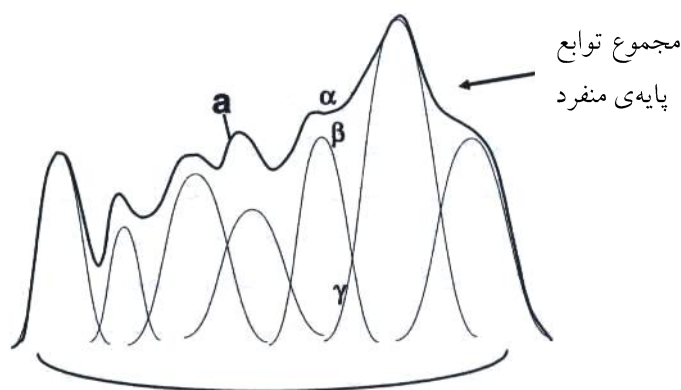
به طور کلی، تبدیل‌ها اغلب منجر به ساده کردن حل مسائل می‌شوند. یکی از این تبدیل‌ها، تبدیل فوریه می‌باشد. این تبدیل بویژه برای ساده‌سازی مسائل در بسیاری از زمینه‌های علمی سودمند می‌باشد.

فصل دوم

## تبدیل فوریه

## ۱-۲- توابع پایه

قبل از وارد شدن به بحث تبدیل فوریه، ابتدا لازم است با توابع پایه آشنا شویم. توابع پایه به ما اجازه می‌دهند تا سیگنال پیچیده (مانند آنچه که در شکل (۱-۲) نشان داده شده است) را از جمع کردن توابع ساده‌تر بسازیم. در این مثال، منحنی  $a$  یک تابع دلخواه (شاید شدت یک خط جاروب شده از یک تصویر و یا بلندی یک قسمت از موسیقی) است. اغلب، یافتن یک رابطه‌ی ریاضی ساده برای بیان چنین شکل موج به ظاهر پیچیده‌ای دشوار است، اما اگر به این مثال توجه کنیم، می‌توانیم مجموعه‌ای از منحنی‌های با شکل زنگ (هر تابع با چنین شکل عمومی را یک قطره<sup>۱</sup> می‌نامیم) را با جابجایی مختلف در نظر بگیریم که هر یک به شیوه‌ای وزن داده شده‌اند، که مجموع آن‌ها منحنی اولیه‌ی مورد نظر را می‌سازد.



توابع پایه‌ی منفرد شبیه به قطره

شکل (۱-۲): توابع پایه‌ی منحنی بالا از مجموع تمام قطره‌های نشان داده شده در قسمت پایین ساخته شده است. برای نمونه، نقطه‌ی  $\alpha$  در منحنی بالا مجموع مقادیر در نقاط  $\beta$  و  $\gamma$  قطره‌های پایین است.

<sup>1</sup> blob

توجه کنید که قطره‌ها همه شکل اساسی یکسانی دارند، گرچه ارتفاع و عرض آن‌ها می‌تواند متفاوت باشد. این المان‌ها (یا هر شکل دیگری که ممکن است انتخاب شود) را توابع پایه می‌نامیم که برای بیان سیگنال اولیه به کار برده شده‌اند.

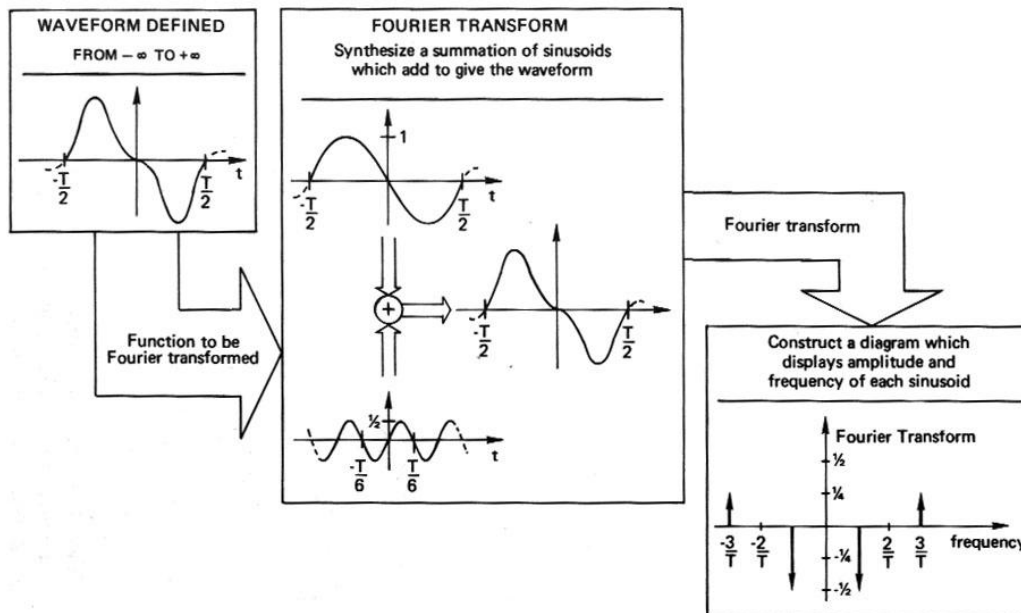
هنگامیکه با تبدیل فوریه سروکار داریم، یک مجموعه‌ی خیلی خاص از توابع پایه، یعنی توابع سینوس و کسینوس را به کار می‌بریم. پیش‌فرضی که تبدیل فوریه بر اساس آن بنا شده است، آن است که هر سیگنال می‌تواند توسط مجموعه‌ای از توابع سینوسی و کسینوسی با فرکانس‌های مختلف و با ضرایب مناسب بیان شود.

## ۲-۲- تبدیل فوریه

مفهوم ساده از تبدیل فوریه در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. اساس تبدیل فوریه‌ی یک شکل<sup>۱</sup>- موج<sup>۲</sup> تفکیک شکل موج به جمعی از موج‌های سینوسی<sup>۳</sup> با فرکانس‌های مختلف است. اگر این موج-های سینوسی را جمع کرده و شکل موج اصلی بدست آید، آنگاه تبدیل فوریه‌ی این شکل موج را بدست آورده‌ایم. نمایش تصویری این تبدیل فوریه نموداری است که دامنه و فرکانس هر موج سینوسی معین را نشان می‌دهد.

<sup>۲</sup> waveform

<sup>۳</sup> هر دوی توابع سینوسی و کسینوسی را امواج سینوسی می‌نامیم.



شکل (۲-۲): شرح تبدیل فوریه

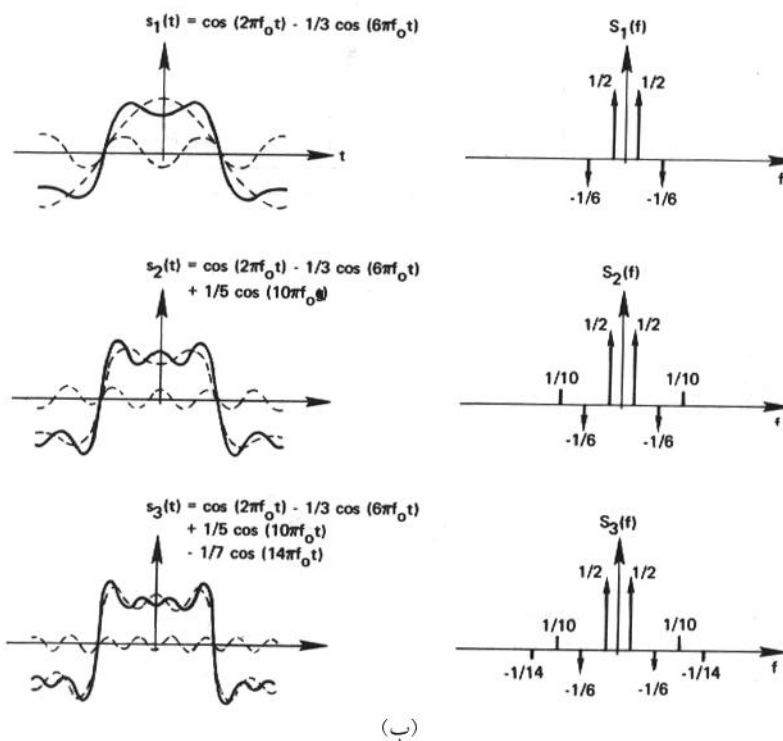
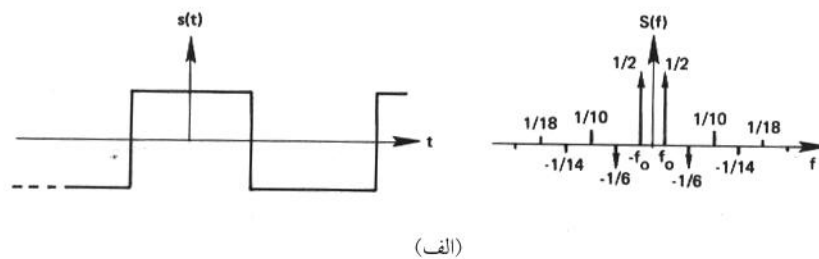
شکل (۲-۲) همچنین مثالی از تبدیل فوریه‌ی یک شکل موج ساده را نشان می‌دهد. تبدیل فوریه‌ی حاصل، دو موج سینوسی است که با جمع کردن آن‌ها شکل موج ایجاد می‌شود. همانطور که گفته شد، نمودار تبدیل فوریه، هم دامنه و هم فرکانس هر موج سینوسی را نشان می‌دهد. طبق قرارداد، برای هر موج سینوسی، هم مقدار مثبت و هم مقدار منفی فرکانس نشان داده شده و دامنه‌ی هر موج نصف شده است. پس، تبدیل فوریه، شکل موج مثال بالا را به دو موج سینوسی جدا تفکیک می‌کند.

تبدیل فوریه، فرکانس‌های موج‌های مختلف تشکیل‌دهنده‌ی شکل موج را تعیین می‌کند، این رابطه به شکل ریاضی، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(2\pi)ft} dt \quad (۱-۲)$$

که در آن،  $x(t)$  شکل موجی است که باید به مجموعی از موج‌های سینوسی تفکیک شود.  $X(f)$  تبدیل فوریه‌ی  $x(t)$  می‌باشد و  $j = \sqrt{-1}$ . مثالی از تبدیل فوریه‌ی یک تابع موج مربعی در شکل (۲-۳ الف)

نشان داده شده است. تبدیل فوری‌ای یک موج مربعی به مجموعه‌ای از موج‌های سینوسی در شکل (۲-۳).  
۳ (ب) نشان داده شده است.

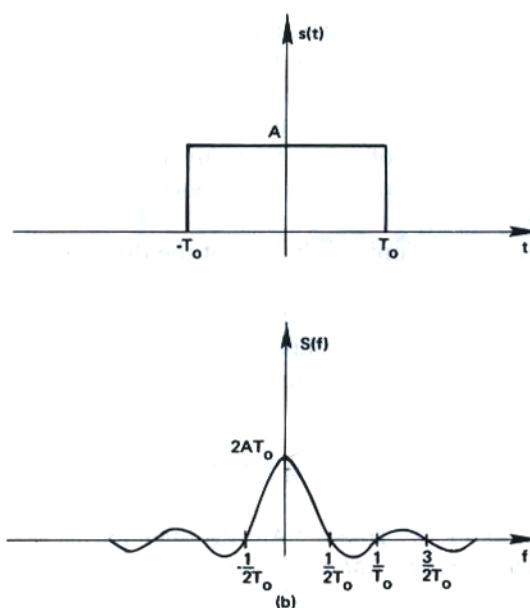


شکل (۲-۳): تبدیل فوری‌ای یک تابع مربعی

اگرچه، در مورد تحلیل تابع‌های متناوب مانند موج مربعی، بیشتر با سری فوریه آشنا هستیم تا تبدیل فوریه؛ اما، باید دانست که سری فوریه حالت ویژه‌ای از تبدیل فوریه است.

اگر شکل موج  $x(t)$ ، متناوب نباشد آنگاه تبدیل فوریه به صورت تابع پیوسته‌ای از فرکانس خواهد بود، به گونه‌ای که،  $x(t)$  بوسیله‌ی جمع موج‌های سینوسی در تمام فرکانس‌ها بیان می‌شود. برای بیان بهتر این مطلب، یک شکل موج پالس و تبدیل فوریه‌ی آن، در شکل (۲-۴) نشان داده شده است. در این مثال، تبدیل فوریه بیان می‌کند که یک فرکانس سینوسی از فرکانس‌های بعدی‌اش مجزا نیست و در نتیجه تمام فرکانس‌ها باید در نظر گرفته شوند.

در نتیجه می‌توان گفت که تبدیل فوریه، بیان تابع در حوزه‌ی فرکانس است. همچنانکه در شکل‌های (۲-۳ الف) و (۲-۴) نشان داده شده است، تبدیل فوریه در حوزه‌ی فرکانس دقیقاً همان اطلاعاتی را می‌دهد که در تابع اولیه در حوزه‌ی زمان وجود دارد؛ و تفاوت این دو فقط در شکل بیانشان است. تحلیل فوریه این امکان را می‌دهد که یک تابع را از نقطه‌نظری دیگر نگاه کرد.



شکل (۲-۴): تبدیل فوریه‌ی یک شکل موج پالس

فصل سوم

## تبدیل فوریه ی گسسته

### ۱-۳- مقدمه

مفاهیم و ویژگی‌های تبدیل فوریه در قالب تئوری مورد بحث قرار گرفت، اما به کار بردن مستقیم تئوری بدون برخی ابزارها بسیار مشکل است. تبدیل فوریه‌ی گسسته و الگوریتم تبدیل فوریه‌ی سریع به عنوان ابزارهای ما برای کاربرد آسان و کامل تئوری فوریه است.

بدلیل وجود گستره‌ی وسیعی از مسائل که مستعد به کاربرد تبدیل فوریه هستند، ما باید بسط منطقی تبدیل فوریه را برای کامپیوترهای دیجیتال فراهم کنیم. جمع عددی معادله (۲-۱)، رابطه‌ی زیر را نشان می‌دهد.

$$X(n\Delta f) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-j(2\pi)n\Delta f k\Delta t} \quad (3-1)$$

برای مسائلی که در قالب تبدیل فوریه‌ی پیوسته نمی‌گنجند، تبدیل فوریه گسسته‌ی معادله‌ی (۳-۱) روش بالقوه‌ای را برای بکارگیری تبدیل فوریه پیشنهاد می‌کند.

### ۲-۳- گذر از حالت پیوسته به حالت گسسته

شکل‌موج‌هایی را که می‌خواهیم عمل تبدیل روی آن انجام دهیم، شکل‌موج‌های حالت واقعی<sup>۴</sup> هستند که به صورت طبیعی آنالوگ می‌باشند. این شکل‌موج‌ها به صورت پیوسته در زمان هستند و باید پیش از اعمال DFT و یا الگوریتم FFT در نقاط گسسته‌ای نمونه‌برداری شوند. از طرفی دیگر، برای پردازش توسط کامپیوترهای دیجیتال، این نقاط نمونه‌برداری شده باید به خوبی دیجیتالی شوند. دانستن دو مفهوم اساسی در تبدیل کامل آنالوگ به دیجیتال، با نام نمونه‌برداری<sup>۵</sup> و پنجره‌ای کردن<sup>۶</sup>، راهی را برای رسیدن به FFT و دانستن نتایج آن، پیش رو می‌گذارد.

<sup>۴</sup> Real life

<sup>۵</sup> Sampling

<sup>۶</sup> Windowing

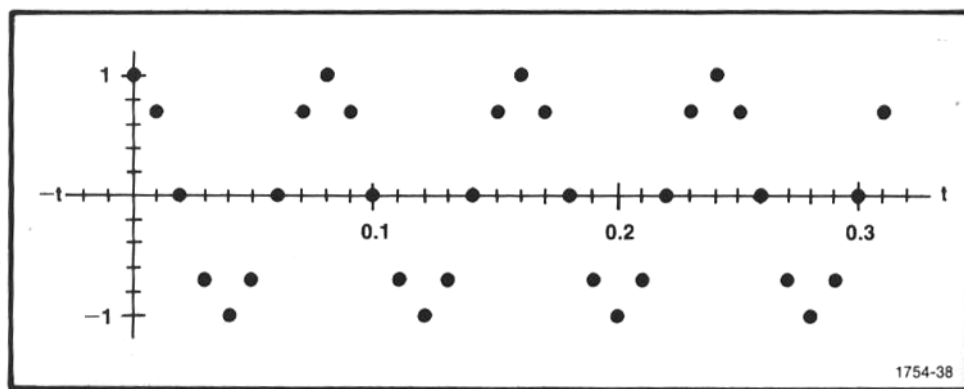
### ۳-۳- پنجره‌ای کردن و نمونه‌برداری

بدلیل بی‌نهایت گسترده بودن توابع پایه‌ی تبدیل فوریه، برخی اشکالات در تبدیل فوریه موجود است. بنابراین، آشکارترین راه جهت بهبود وضعیت، محدود نمودن گستردگی هر یک از توابع پایه با ضرب کردن آن در یک تابع پنجره خواهد بود. اگر مقادیر یک شکل موج را محاسبه کرده و آن‌ها را بر روی صفحه‌ای گرافیکی رسم کنیم، در واقع عمل پنجره‌ای کردن و نمونه‌برداری را انجام داده‌ایم. برای مشاهده‌ی چگونگی انجام این کار، یک موج کسینوسی را در نظر می‌گیریم. برای مثال، یک موج کسینوسی دارای دامنه‌ی بیشینه‌ی ۱ ولت و فرکانس ۱۲/۵ هرتز. نمایش این عبارت به شکل ریاضی، به صورت  $x(t) = \cos 2\pi 12.5t$  می‌باشد.

اکنون به رسم نمودار  $x(t) = \cos 2\pi 12.5t$  می‌پردازیم. چهار تکرار برای این موج می‌تواند کافی باشد، یعنی ما نیاز به مقادیر محاسبه شده در بازه‌ی زمانی  $\frac{4}{12.5} = 0.32$  ثانیه داریم. از طرفی، شکل موج باید واضح باشد و نیازی به درونیابی زیاد بین نقاط نباشد، با توجه به این نکته، ما از ۳۲ نقطه‌ی با فاصله‌ی مساوی استفاده می‌کنیم. به بیان دیگر، موج کسینوسی را در هر ۰/۰۱ ثانیه از ۰ ثانیه تا ۰/۳۱ ثانیه رسم می‌کنیم. مقادیر این نقاط در جدول (۳-۱) فهرست شده و در شکل (۳-۱) رسم شده است.

جدول (۳-۱): مقادیر  $x(t) = \cos 2\pi 12.5t$  در هر ۰/۰۱ ثانیه در بازه‌ی زمانی ۰ تا ۰/۳۱ ثانیه

| t    | x(t)   | t    | x(t)   | t    | x(t)   | t    | x(t)   |
|------|--------|------|--------|------|--------|------|--------|
| 0.00 | 1.000  | 0.08 | 1.000  | 0.16 | 1.000  | 0.24 | 1.000  |
| 0.01 | 0.707  | 0.09 | 0.707  | 0.17 | 0.707  | 0.25 | 0.707  |
| 0.02 | 0.000  | 0.10 | 0.000  | 0.18 | 0.000  | 0.26 | 0.000  |
| 0.03 | -0.707 | 0.11 | -0.707 | 0.19 | -0.707 | 0.27 | -0.707 |
| 0.04 | -1.000 | 0.12 | -1.000 | 0.20 | -1.000 | 0.28 | -1.000 |
| 0.05 | -0.707 | 0.13 | -0.707 | 0.21 | -0.707 | 0.29 | -0.707 |
| 0.06 | 0.000  | 0.14 | 0.000  | 0.22 | 0.000  | 0.30 | 0.000  |
| 0.07 | 0.707  | 0.15 | 0.707  | 0.23 | 0.707  | 0.31 | 0.707  |



شکل (۱-۳): موج کسینوسی پنجره‌ای شده و نمونه‌برداری شده

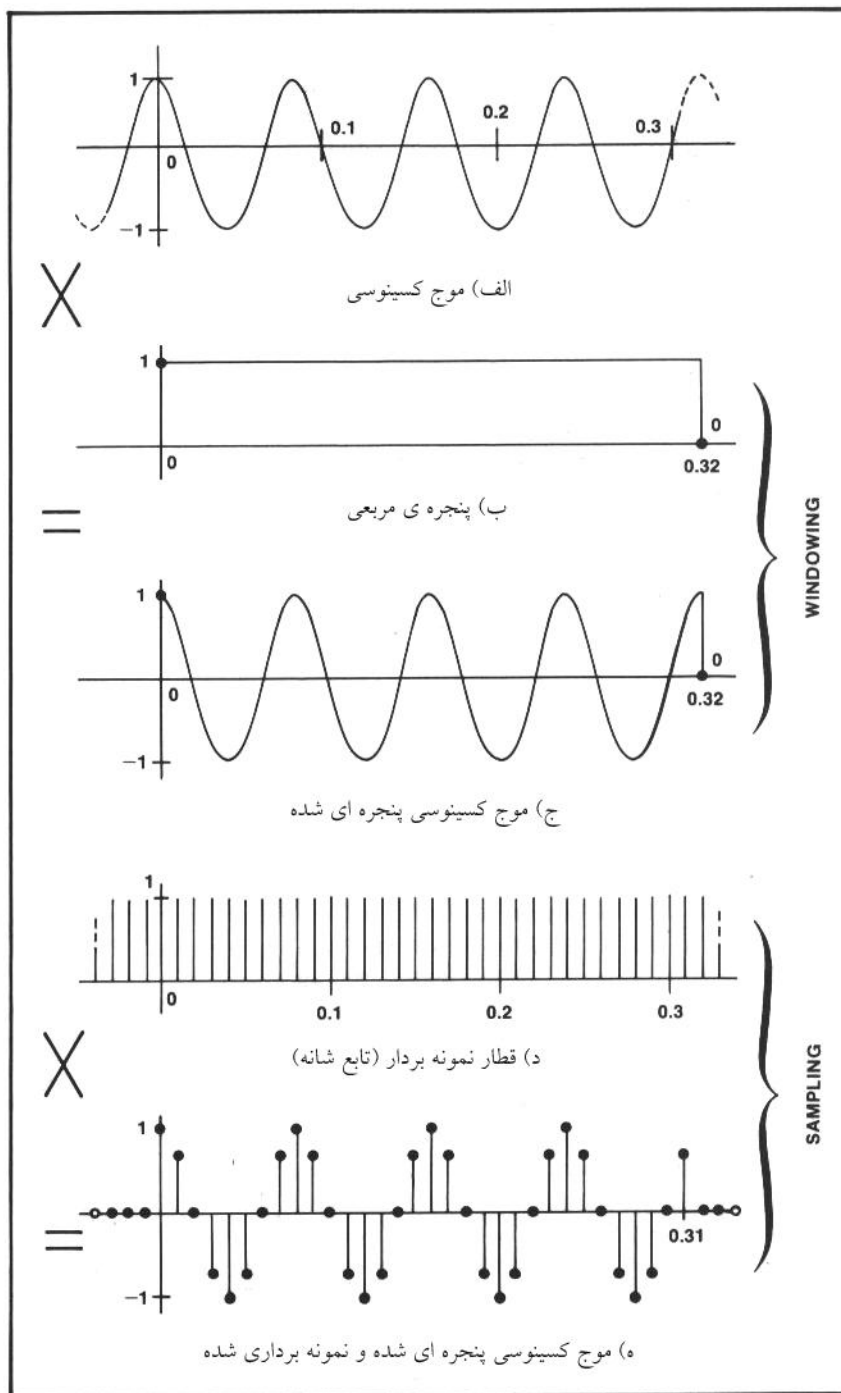
با توجه به جدول (۱-۳)، نقطه‌ی شروع هر چرخه، داری مقدار ۱ و نقطه‌ی پایان آن دارای مقدار ۰/۷۰۷ است.

شکل (۱-۳)، نمایانگر یک موج کسینوسی پنجره‌ای شده و نمونه‌برداری شده می‌باشد. این موج در بازه‌ی زمانی محدودی، که برای این مورد از ۰ تا ۰/۳۱ ثانیه می‌باشد، پنجره‌ای شده و مقادیر واقعی آن در ۳۲ نقطه‌ی گسسته در همان بازه‌ی زمانی نمونه‌برداری شده است. تا اینجا، با مفاهیم اساسی پنجره‌ای کردن و نمونه‌برداری، دست‌کم در بیان صفحه‌ی گرافیکی آشنا شدیم.

در حالت پردازش شکل موج، شکل (۱-۳) می‌تواند از طریق ضرب‌های نشان داده شده در شکل (۲-۳) بدست آید. شکل (۲-۳ الف) یک شکل موج را، که در اینجا یک موج کسینوسی است، نشان می‌دهد که قرار است پنجره‌ای شود. شکل (۲-۳ ب) یک پنجره‌ی مربعی (پالس مربعی) است که قرار است از آن استفاده گردد. ضرب این دو شکل در شکل (۲-۳ ج) نشان داده شده است که یک موج کسینوسی پنجره‌ای شده می‌باشد.

در شکل‌های (۲-۳ ب) و (۲-۳ ج)، به نقاط پررنگ در گوشه‌های پنجره دقت کنید. این نقاط در عمل بخشی از پنجره نیستند و در حقیقت برای معین بودن گوشه‌های پنجره به کار می‌رود. پنجره‌ی شکل (۲-۳ ب) به این صورت تعریف می‌شود که در زمان صفر با دامنه‌ی ۱ شروع می‌گردد و تا زمان

۰/۳۲ ثانیه با دامنه‌ی ثابت ۱ ادامه می‌یابد، سپس، پنجره در ثانیه‌ی ۰/۳۲ ثانیه با دامنه‌ی صفر پایان می‌یابد. این تعریف صریح و دقیق در مورد لبه‌های پنجره در بحث DFT و FFT دارای اهمیت است.



شکل (۲-۳): پنجره‌ای کردن و نمونه‌برداری

بعد از پنجره‌ای کردن، مفهوم نمونه‌برداری توسط قطاری از دامنه‌های واحد ضربه‌های نشان داده شده در شکل (۲-۳ د)، که به تابع شانه معروف است، بیان می‌گردد. هر ضربه در این قطار، به طور ناگهان از مقدار صفر خیز برمی‌دارد و دوباره به مقدار صفر برمی‌گردد. بنابراین، هر ضربه در یک زمان واحد، مقدار غیر صفر دارد. پس، هر ضربه دارای مساحتی برابر ۱ می‌باشد، در نتیجه، هر ضربه دارای ارتفاعی برابر مساحتش است. هنگامی که این قطار ضربه یا قطار نمونه‌بردار یا تابع شانه، در موج کسینوسی پنجره‌ای شده ضرب می‌شود، شکل (۲-۳ ه) که موج کسینوسی پنجره‌ای شده و نمونه‌برداری شده می‌باشد، بدست می‌آید. موقعیت‌های زمانی نمونه‌ها متناسب با موقعیت‌های زمانی ضربه‌ها است. زمان‌های نمونه‌برداری گسسته و مقادیر نمونه‌برداری در شکل (۲-۳ ه) به صورت نقاط پرننگ نشان داده شده است.

توجه شود که موج کسینوسی پنجره‌ای شده و نمونه‌برداری شده در شکل (۲-۳ ه) دقیقاً همان موج کسینوسی رسم شده در شکل (۱-۳) است، با این تفاوت که در شکل (۱-۳) ضربه‌ها نشان داده نشده است. بنابراین شکل (۲-۳)، در حقیقت، راه دیگری برای رسیدن به نتایج جدول (۱-۳) و شکل (۱-۳) است.

در حالت پردازش‌های فیزیکی، نتایج جدول (۱-۳) و شکل (۲-۳ ه) می‌تواند بوسیله‌ی به کار بردن مبدل‌های آنالوگ به دیجیتال بدست آید. در این مورد، اَعمال و ضرب‌های انجام شده بر روی شکل (۲-۳ ه) به کار نمی‌رود اما، نتایج نهایی همانند روش گفته شده است.

برای مثال، پنجره‌ی (۲-۳ ه) متناسب با روشن و خاموش شدن ورودی مبدل آنالوگ به دیجیتال است. زمانی که کلید مبدل در حالت روشن است، شکل موجی که قرار است دیجیتال شود، اجازه‌ی عبور می‌یابد و زمانی که کلید مبدل در حالت خاموش درمی‌آید، شکل موج نیز قطع می‌گردد. طول پنجره یا عرض پالس، متناسب با طول زمانی است که مبدل آنالوگ به دیجیتال روشن است.

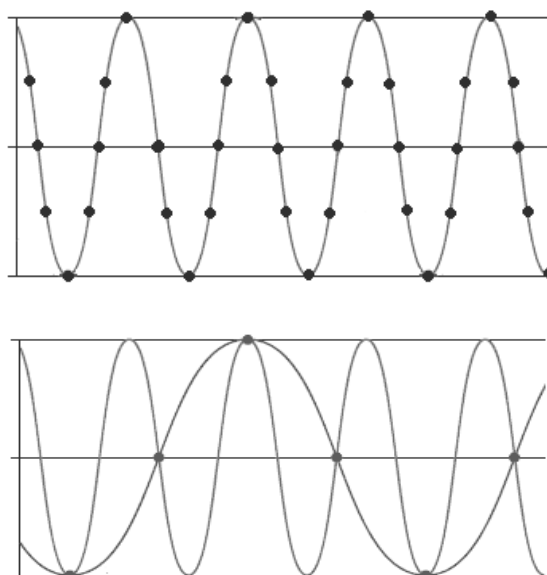
در عمل، نمونه‌برداری توسط وسایل مشابه انجام می‌پذیرد. به این صورت که فرایند پنجره‌ای کردن در بازه‌های زمانی نزدیک به هم انجام می‌گیرد به گونه‌ای که وقتی پنجره‌ی نمونه‌برداری در حالت روشن باشد، یک خازن یا وسیله‌ای دیگر مقدار شکل موج را در طول زمان نمونه‌برداری می‌گیرد. در این صورت، یک مقدار ویژه برای هر نقطه‌ی نمونه همانند شکل (۳-۱) و شکل (۳-۲) بدست می‌آید. این مقادیر، سپس، می‌تواند در حافظه‌ای مشابه جدول (۳-۱) ذخیره گردد. اگرچه در بیشتر موارد، مقادیر نمونه به داده‌های دیجیتال تبدیل شده و در حافظه‌ی سازگار با کامپیوتر ذخیره می‌گردند.

راه‌های متعددی برای عمل پنجره‌ای کردن و نمونه‌برداری وجود دارد. همانطور که گفته شد، برخی مبدل‌های آنالوگ به دیجیتال ابتدا عمل پنجره‌ای کردن را انجام داده و سپس به عمل نمونه‌برداری می‌پردازند. در برخی دیگر، عمل پنجره‌ای کردن و نمونه‌برداری، به صورت همزمان با هم صورت می‌پذیرد. در تمام موارد، نتایج نهایی شبیه به هم هستند.

توجه به این نکته، خالی از عیب نیست که نمونه‌ها می‌توانند در بازه‌های مساوی، بازه‌های لگاریتمی، و یا هر نوع بازه‌ای دیگر گرفته شوند. اما، استفاده از بازه‌های مساوی، از سایر تکنیک‌ها شایع‌تر است. در این بحث نیز هر جا سخن از نمونه‌برداری است منظور، نمونه‌برداری با بازه‌های یکسان است مگر آنکه خلاف آن گفته شود.

### ۴-۳- قضیه‌ی نمونه‌برداری

هنگامی که نرخ نمونه‌برداری به اندازه‌ی کافی بالا نباشد، پدیده‌ی خطای فرکانسی<sup>۷</sup> رخ می‌دهد. در شکل زیر اهمیت این موضوع نشان داده شده است. در شکل اول نرخ نمونه‌برداری مناسب است اما در شکل دوم به دلیل انتخاب نرخ پایین نمونه‌برداری، پدیده‌ی خطای فرکانسی رخ داده است.



شکل (۱۶): نمونه‌برداری مناسب (شکل اول) و نمونه‌برداری نامناسب (شکل دوم)

سؤال این است که برای پرهیز از بروز پدیده‌ی خطای فرکانسی، نرخ نمونه‌برداری چه اندازه باید انتخاب گردد؟

شخصی به نام نایکوئیست به این سؤال پاسخ داده است. فرضیه‌ای به نام فرضیه‌ی نایکوئیست وجود دارد که به صورت زیر بیان می‌گردد:

«برای پرهیز از پدیده‌ی خطای فرکانسی، نرخ نمونه‌برداری باید بیش از دو برابر فرکانس بیشینه در سیگنال مورد بحث انتخاب گردد». به عبارتی دیگر، برای نمایش درست سیگنال آنالوگ، نمونه‌های دیجیتالی می‌بایست با بسامد  $f_s$  گرفته شود به صورتی که:

$$f_s > 2f_{max}$$

<sup>۷</sup> Aliasing

### ۵-۳- کارکردهای DFT بر روی داده‌های نمونه‌برداری

شکل (۳-۲) می‌تواند به حوزه‌ی فرکانس با بکار بردن انتگرال فوریه تبدیل شود. با دستکاری در تبدیل، شکل نهایی زیر بدست می‌آید که به تبدیل فوریه‌ی گسسته مشهور است؛ به این صورت:

$$X(n\Delta f) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-j(2\pi)n\Delta f k\Delta t} \quad (3-2)$$

این عبارت به ما اجازه می‌دهد که یک سری زمانی از نمونه‌ها همانند جدول (۲) را به یک سری از نمونه‌ها در حوزه‌ی فرکانس تبدیل کنیم. با کمی دستکاری دیگر می‌توان تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی معکوس را بدست آورد؛ به صورت زیر:

$$x(k\Delta t) = \Delta f \sum_{n=0}^{N-1} X(n\Delta f) e^{j(2\pi)n\Delta f k\Delta t} \quad (3-3)$$

این عبارت به ما اجازه می‌دهد تا یک سری از نمونه‌های در حوزه‌ی فرکانس را که توسط DFT محاسبه شده است، به سری نمونه‌های در حوزه‌ی زمان برگردانیم.

پارامترهای به کار رفته در هر دو رابطه‌ی گسسته‌ی بالا، به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$N$ : تعداد نمونه‌هایی که در نظر گرفته شده است؛

$\Delta t$ : زمان بین نمونه‌ها که به آن، بازه‌ی نمونه‌برداری هم گفته می‌شود. در این صورت  $N\Delta t$

طول پنجره را می‌دهد؛

$\Delta f$ : بازه‌ی نمونه‌برداری در حوزه‌ی فرکانس که برابر با  $\frac{1}{N\Delta t}$  می‌باشد؛

$k$ : شمارنده‌ی نمونه‌ی زمانی است و  $k=0, 1, \dots, N-1$ ؛

$n$ : شمارنده‌ی نمونه در حوزه‌ی فرکانس است و  $n=0, 1, \dots, N-1$ ؛

$x(k\Delta t)$ : دسته‌ی گسسته‌ای از نمونه‌های زمانی که شکل موجی را تشکیل می‌دهند که قرار

است تبدیل شود.

$X(n\Delta f)$ : دسته‌ای از ضرایب فوریه که بوسیله‌ی تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی  $x(k\Delta t)$  بدست آمده‌اند.

در ادامه، با قرار دادن  $\Delta t = 1$  و در نتیجه  $\Delta f = \frac{1}{N}$ ، به شکل معمول DFT و FFT می‌رسیم، که در زیر آمده است:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j(2\pi)nk/N} \quad \text{DFT} \quad (3-4)$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{j(2\pi)nk/N} \quad \text{معکوس DFT} \quad (3-5)$$

برای سهولت در محاسبات، رابطه‌ی اولر  $e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$ ، برای تغییر رابطه‌ی نمایی مختلط به رابطه‌ی زیر به کار می‌رود.

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \frac{\cos(2\pi)nk}{N} - jx(k) \frac{\sin(2\pi)nk}{N} \quad \text{DFT} \quad (3-6)$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \frac{\cos(2\pi)nk}{N} + jX(n) \frac{\sin(2\pi)nk}{N} \quad \text{معکوس DFT} \quad (3-7)$$

اکنون مجموعه‌ای از عملیات‌ها برای محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی گسسته برای رشته‌ای از نمونه‌های شکل موج باقی می‌ماند. برای نمونه، می‌توان تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی موج کسینوسی را از مقادیر فهرست شده در جدول (۳-۱)، محاسبه کرد. این جدول دارای ۳۲ نمونه‌ی گرفته شده است، در نتیجه،  $k$  و  $n$  مقادیر ۰ و ۱ و ۲ و ... و ۳۱ را دارا می‌باشند. مقادیر  $x(k)$  به طور مستقیم از جدول (۱) بدست می‌آیند، به گونه‌ای که  $x(0)$  متناسب با زمان صفر است و دارای مقداری برابر با ۱/۰۰۰ می‌باشد و  $x(1)$  متناسب با زمان ۰/۰۱ ثانیه و مقدار آن برابر ۰/۷۰۷ است، و الی آخر. هرکدام از ضرایب فوریه،  $X(n)$  بوسیله‌ی جمع  $\left[ x(k) \frac{\cos(2\pi)nk}{N} - jx(k) \frac{\sin(2\pi)nk}{N} \right]$  برای تمام مقادیر  $k$  در هر  $n$  محاسبه می‌شود. برای نمونه، برای  $n=0$  مجموع  $\left[ x(k) \frac{\cos(2\pi)nk}{N} - jx(k) \frac{\sin(2\pi)nk}{N} \right]$  را به ازای مقادیر  $k$  از

۰ تا ۳۱ حساب می‌کنیم، بعد این مجموع را به ازای  $n=1$  و به ازای تمام مقادیر  $k$  محاسبه می‌کنیم، و الی آخر. پس از انجام این کار، مجموعه‌ای از ۳۲ ضریب فوریه را برای ۳۲ نمونه‌ی زمانی موج کسینوسی را خواهیم داشت. این ضرایب فوریه، دامنه‌ی فرکانس مختلط موج کسینوسی را در ۳۲ فرکانس گسسته تعیین خواهد کرد.

اگر ما بخواهیم تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی فوق را انجام دهیم، در واقع باید ۳۲ عبارت جداگانه، هر کدام برای ۳۲ مقدار  $n$  جمع گردند. این به آن معنی است که  $۳۲ \times ۳۲ = ۱۰۲۴$  عملیات عمده برای ۳۲ نقطه صورت پذیرد. بنابراین، حتی اگر انجام هر عملیات، نسبتاً ساده باشد، اما انجام دادن ۱۰۲۴ عملیات، چندان ساده نخواهد بود.

فصل چهارم

## تبدیل فوریہ سریع

#### ۴-۱- مقدمه‌ای بر تبدیل فوریه‌ی سریع

تبدیل فوریه‌ی سریع (FFT)<sup>۸</sup> یک ابزار اساسی حل مسأله در بخش‌های آموزشی، صنعتی و نظامی بوده است. از سال ۱۹۶۵، کاربرد FFT به سرعت گسترش یافته و رایانه‌های شخصی نیز بر انفجار کاربردهای روزافزون FFT دامن زده‌اند.

تبدیل فوریه سریع به طور گسترده در پردازش و آنالیز سیگنال به کار می‌رود. بوجود آمدن نرم-افزارهای تخصصی در هر دو بخش تجاری و نظامی، منجر به پردازش سیگنال پیشرفته بر مبنای ویژگی‌های FFT شد. اجرای الگوریتم FFT بر روی رایانه‌های بزرگ، تکنیک‌های حل منحصربه‌فردی را بوجود آورد که به سهولت قابل دستیابی بودند. رایانه‌های شخصی، هنوز بر کاربردهای FFT می-افزایند. برای دانشجویان، مهندسان، دانشمندان کامپیوتر و متخصصان تجزیه، FFT به صورت ابزاری گرانبها در حل مسایل درآمده است.

امروزه عمومیت و شهرت FFT بوسیله‌ی تنوع گسترده‌ی حوزه‌های کاربردی آن به اثبات رسیده است. علاوه بر کاربردهای مرسوم پردازش سیگنال راداری، ارتباطی و کلامی، حوزه‌های کاربرد جدید FFT شامل مهندسی پزشکی، تصویربرداری، داده‌های بازار سهام، طیف‌سنجی، متالوژی، تحلیل سیستم‌های غیرخطی، تحلیل مکانیکی، تحلیل ژئوفیزیکی، شبیه‌سازی، سنتز صدا، و تعیین تغییرات وزن در تولید کاغذ از خمیر می‌باشد. روشن است که متون کاربردی نمی‌تواند وارد عمق چنین گستره‌ای از فناوری گردد.

<sup>8</sup> Fast Fourier Transform (FFT)

## ۴-۲- کاربردهای تبدیل فوریه‌ی سریع

تبدیل فوریه‌ی سریع دارای کاربردهای متنوعی در بسیاری از حوزه‌های کاربردی\_حتی در حوزه\_های کاربردی نامربوط به هم\_ می‌باشد. اگرچه، ما می‌دانیم که ازدیاد کاربردهای FFT در حوزه‌های کلی و گوناگون به این دلیل است که همه‌ی آن‌ها در قیدی به نام تبدیل فوریه مشترک هستند. برای سال‌های متمادی، تنها نخبگان ریاضی نظری قادر به آشنایی با چنین طیف وسیعی از فناوری بودند، اما، بوسیله‌ی FFT، تحلیل فوریه به روشی کاهش یافت که به آسانی در دسترس و عملی بود. FFT به دلیل سودمندی و در دسترس بودنش، به شکل یک واحد (مقیاس) تحلیل استاندارد در آمده است.

در جدول (۴-۱)، فهرستی از حوزه‌های کاربردی FFT نشان داده شده است. به محض مورد توجه قرار گرفتن FFT توسط مهندسان و دانشمندان، این تبدیل به عنوان تکنیک مورد استفاده در حوزه‌های گسترده‌ای، از تحلیل روند بازار سهام تا تعیین تغییرات وزن در تولید کاغذ از خمیر قرار گرفت. تکامل فناوری کامپیوتر، به‌ویژه رایانه‌های شخصی، FFT را به عنوان یک ابزار تحلیل سودمند و قدرتمند تثبیت کرده است. همانطور که در جدول (۴-۱) دیده می‌شود، حوزه‌های کاربردی FFT بسیار گسترده و گوناگون است.

در دوره‌ای که مقاومت در برابر فناوری غیرممکن است، انگیزه‌ی یافتن مفاهیمی تحلیلی که ما را قادر سازد تا از طریق ابزارهای آشنا به حوزه‌های ناآشنا تقرب یابیم، وجود دارد. به یقین، FFT یکی از پیشامدهای مهم در فناوری پردازش سیگنال می‌باشد.

همانطور که قبلاً اشاره شد، قید مشترک حوزه‌های کاربردی FFT، تبدیل فوریه است. ویژگی مهم تبدیل فوریه توانایی آن در نمایش یک تابع یا موج در هر دو حوزه‌ی زمان و فرکانس است.

جدول (۴-۱): فهرستی از حوزه‌های کاربردی FFT

| مکانیک کاربردی:                   | رادار:                  |
|-----------------------------------|-------------------------|
| دینامیک سازه‌ای                   | اندازه‌گیری مقطع رادار  |
| جلوگیری از فلاتر بال هواپیما      | نشان‌دهنده‌ی هدف متحرک  |
| عیب‌یابی دینامیک ماشین            | پردازنده‌ی داپلر        |
| مدلسازی نیروگاه هسته‌ای           | تراکم ضربه              |
| تحلیل ارتعاشی                     | حذف پارازیت             |
| صوت و امواج صوتی:                 | ابزارهای اندازه‌گیری:   |
| تصویربرداری صوتی                  | رنگ‌نگاری               |
| مبدل (ترانسدیوسر) ماوراء صوت      | میکروسکوپی (ذره‌بینی)   |
| پردازش آرایه‌ای                   | طیف‌نگاری               |
| اندازه‌گیری‌های صوتی              | پراش پرتوهای ایکس       |
| سنتز موسیقی                       | رنگ‌نگاری الکتریکی      |
| مهندسی پزشکی:                     | پردازش سیگنال:          |
| تشخیص انسداد مجاری تنفسی          | فیلترهای مناسب (هماهنگ) |
| ارزیابی خستگی ماهیچه              | تحلیل طیفی بلادرنگ      |
| ارزیابی صدمات وارد به دریچه‌ی قلب | تحلیل جسم مرکزی         |
| بررسی خصوصیات بافت‌های بدن        | تخمین تابع وابستگی      |
| تشخیص بیماری‌های قلبی             | تشخیص و سنتز گفتار      |
| بررسی دینامیک شریان سرخرگ         | تولید فرایند تصادفی     |
|                                   | تخمین تابع انتقال       |

| روش های عددی:                                                                                                                                                                                                                           | ارتباطات:                                                                                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>درون یابی پرسرعت</p> <p>مسایل مقدار مرزی</p> <p>معادلات ریکاتی و دیریکله</p> <p>انتگرال ریلی</p> <p>معادله ی انتگرالی وینز-هاپ</p> <p>معادله نفوذ</p> <p>انتگرال گیری عددی</p> <p>تبدیل کارنن-لو</p> <p>معادلات دیفرانسیلی بیضوی</p> | <p>تحلیل سیستم ها</p> <p>تافتگرهای انتقالی</p> <p>فیلترسازی چندکاناله</p> <p>فشرده سازی پهنای باند ویدئویی</p> <p>فیلترهای دیجیتالی پرسرعت</p> <p>تشخیص سیگنال</p> |
| الکترومغناطیس:                                                                                                                                                                                                                          | متفرقه:                                                                                                                                                            |
| <p>انتشار خطوط نواری ریز</p> <p>تحلیل شبکه</p> <p>سنجش انعکاس در حوزه ی زمان</p>                                                                                                                                                        | <p>سیستم های قدرت الکتریکی</p> <p>متالوژی</p> <p>ترمیم عکس</p> <p>تحلیل سیستم های غیرخطی</p> <p>ژئوفیزیک</p> <p>مدلسازی مدارهای یکپارچه</p> <p>کنترل کیفیت</p>     |

## ۴-۳- روش تبدیل فوریه سریع

بررسی شد که چگونه می‌توان تئوری تبدیل فوریه پیوسته را تغییر داد تا بتواند بر روی مجموعه‌ی محدود نمونه‌های یک سیگنال عمل کند. روشن است که برای اعمال هر یک از تئوری‌های فوق به سیگنال‌های واقعی و با استفاده از کامپیوتر این یک گام مهم حساب می‌شود. اگرچه با موشکافی در معادله‌ی (۳-۱) مشاهده می‌شود که اگر  $N$  نقطه‌ی داده از تابع  $x(t)$  وجود داشته باشد و اگر ما بخواهیم دامنه‌ی  $N$  موج سینوسی مجزا را تعیین کنیم، آنگاه زمان محاسبه متناسب با  $N^2$  خواهد بود. حتی اگر کامپیوترهای پرسرعت نیز وجود داشته باشد، برای مقادیر بزرگ  $N$ ، محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی گسسته به زمان زیادی نیاز خواهد داشت.

در سال ۱۹۶۵، *Cooley* و *Tukey* الگوریتم ریاضی خود را منتشر کردند، که به نام «تبدیل فوریه‌ی سریع» مشهور شد. تبدیل فوریه‌ی سریع (FFT)، یک الگوریتم محاسباتی است که زمان محاسبه‌ی معادله‌ی (۳-۱) را به زمانی متناسب با  $N \log N$  کاهش می‌دهد. این افزایش در سرعت محاسبه، بسیاری از حقایق تحلیل‌های علمی را بطور کلی دگرگون کرد و انقلابی در محاسبات بعدی تبدیل فوریه بوجود آورد.

اینک به چگونگی عملکرد FFT می‌پردازیم.

یک ماتریس عامل<sup>۹</sup> به منظور بیان الگوریتم FFT به صورت شهودی<sup>۱۰</sup> مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین این ماتریس با گراف‌های جریان سیگنال<sup>۱۱</sup> نیز نمایش داده شده‌اند. از این گراف‌ها می‌توان اساس برنامه و کد کامپیوتری FFT را تشکیل دهیم.

<sup>۹</sup> Matrix-factoring

<sup>۱۰</sup> intuitive

<sup>۱۱</sup> Signal flow graph

#### ۴-۴- فرمولاسیون ماتریس:

با توجه به نتایج تبدیل فوریه گسسته رسیدیم که:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (۱-۴)$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \quad (۲-۴)$$

و با فرض  $N=4$  می توان نوشت:

$$X(0) = x_0(0)W^0 + x_0(1)W^0 + x_0(2)W^0 + x_0(3)W^0$$

$$X(1) = x_0(0)W^0 + x_0(1)W^1 + x_0(2)W^2 + x_0(3)W^3$$

$$X(2) = x_0(0)W^0 + x_0(1)W^2 + x_0(2)W^4 + x_0(3)W^6 \quad (۳-۴)$$

$$X(3) = x_0(0)W^0 + x_0(1)W^3 + x_0(2)W^6 + x_0(3)W^9$$

دستگاه معادلات خطی بالا را می توان به شکل ماتریسی زیر نوشت.

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (۴-۴)$$

یا به شکل کامل تر:

$$X(n) = W^{nk} x_0(k) \quad (۴-۵)$$

ماتریس فوق مشخص می کند که وقتی  $W$  و  $x_0(k)$  مختلط<sup>۱۲</sup> باشند، به تعداد  $N^2$  ضرب مختلط و  $N(N-1)$  جمع مختلط برای انجام محاسبات ماتریس لازم است. هنر FFT این است که این الگوریتم تعداد ضرب و جمع لازم برای انجام این محاسبات را تا حد مطلوبی کاهش می دهد. در ادامه، یک روش شهودی در مورد اینکه چطور این کاهش در تعداد محاسبات با FFT صورت می گیرد صحبت خواهیم کرد. به بحث ریاضی و شیوهی عملکرد FFT نیز در بخش های آتی خواهیم پرداخت.

<sup>12</sup> complex

## ۵-۴- بررسی شهودی<sup>۱۳</sup>:

برای نمایش الگوریتم FFT مناسب است که تعداد نقاط  $x_0(k)$  را طبق رابطه  $N = 2^r$  انتخاب نماییم که  $r$  یک عدد صحیح مثبت است. در بخش‌های آتی و در موارد پیشرفته می‌توان از این قید نیز صرف‌نظر کرد. اگر به عنوان مثال  $N = 4 = 2^2 = 2^r$  را در نظر بگیریم بنابراین می‌توانیم FFT را برای محاسبات معادله‌ی (۸.۴) به کار ببریم.

گام نخست، بررسی الگوریتم FFT برای این مثال به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (6-4)$$

ماتریس (۶-۴) از ماتریس (۴-۴) به دست آمده است. با استفاده از رابطه‌ی  $W^{nk} = W^{nk \bmod(N)}$  که

$nk \bmod(N)$  باقیمانده تقسیم  $nk$  بر  $N$  محسوب می‌گردد. اگر  $N=4$  و  $n=2$  و  $k=3$  در نتیجه:

$$W^6 = W^2 \quad (7-4)$$

چرا که:

$$(4-8)$$

$$W^{nk} = W^6 = \exp\left[\left(\frac{-j2\pi}{4}\right)6\right] = \exp[-j3\pi] = \exp[-jp] = \exp\left[\left(\frac{-j2\pi}{4}\right)2\right] = W^2 = W^{nk \bmod(N)}$$

گام دوم این است که ماتریس مربع ماتریس (۹-۴) را بسازیم.

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^2 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (9-4)$$

<sup>13</sup> intuitive

روش عامل سازی بر پایه‌ی نظریه بررسی الگوریتم FFT است که در بخش‌های آتی به آن خواهیم پرداخت. در این حد کافی است که ضرب دو ماتریس (۹-۴)، ماتریس (۶-۴) را نشان می‌دهد. البته به شرطی که سطر سوم و دوم را جابه‌جا کنیم. باید دقت کرد که ماتریس ستونی  $X(n)$  نیز تغییر کرده است و می‌توانیم در نظر بگیریم:

$$\bar{X}(n) = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} \quad (۱۰-۴)$$

این عامل سازی کلید کارکرد FFT است. با پذیرفتن این مطلب که معادله‌ی حاصله، معادله‌ی درستی است، باید نشان دهیم که تعداد ضرب-های مورد نیاز برای محاسبه‌ی این معادله بسیار کمتر از معادله‌ی ماتریس است. ابتدا می‌توان در نظر گرفت که:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (۱۱-۴)$$

به طوری که  $x_1(k)$  از حاصل ضرب دو ماتریس سمت راست معادله (۹-۴) می‌باشد.  $x_1(0)$  توسط یک ضرب مختلط و یک جمع مختلط محاسبه می‌گردد (به خاطر بررسی یک نتیجه‌ی عمومی  $W^0$  به واحد کاهش پیدا نکرده است).

$$x_1(0) = x_0(0) + W^0 x_0(2) \quad (۴-۱۲)$$

$x_1(1)$  نیز توسط یک ضرب مختلط و یک جمع مختلط بدست می‌آید. اما برای  $x_1(2)$  تنها یک جمع مختلط نیاز است. توجه داریم که:

$$x_1(2) = x_0(0) + W^2 x_0(2) = x_0(0) - W^0 x_0(2) \quad (۱۳-۴)$$

که ضرب مختلط  $W^0 x_0(2)$  قبلاً در محاسبه‌ی  $x_1(0)$  محاسبه شده است. با همین استدلال  $x_1(3)$  نیز تنها با یک جمع مختلط و بدون ضرب محاسبه خواهد شد. بردار واسطه  $x_1(k)$  در کل با ۴ جمع مختلط و ۲ ضرب مختلط محاسبه خواهد شد. اکنون، محاسبه‌ی معادله‌ی (۴-۹) را ادامه می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (۱۴-۴)$$

عبارت  $x_2(0)$  نیز بوسیله‌ی یک جمع و یک ضرب مختلط بدست می‌آید.

$$x_2(0) = x_1(0) + W^0 x_1(1) \quad (۱۵-۴)$$

عبارت  $x_2(1)$  با یک جمع محاسبه می‌شود. چرا که  $W^0 = -W^2$ . با همین شیوه و همین استدلال، عبارت  $x_2(2)$  نیز بوسیله‌ی یک ضرب و جمع مختلط محاسبه می‌گردد و  $x_2(3)$  تنها با یک جمع مختلط. همانطور که ملاحظه می‌شود  $\bar{X}(n)$  تنها با ۴ ضرب مختلط و ۸ جمع مختلط حاصل می‌شود در حالیکه محاسبه‌ی  $X(n)$  به ۱۶ ضرب مختلط و ۱۲ نیاز دارد. بسیار واضح و مبرهن است که فرایند ماتریس عامل‌سازی صفرهایی را در ماتریس عامل وارد می‌کند که نتیجتاً تعداد ضرب‌های لازم را برای محاسبه کاهش می‌دهد. برای مثال عنوان شده، فرایند با یک عامل ۲ تعداد ضرب‌ها را کاهش می‌دهد. چون زمان محاسبات بستگی بسیاری به تعداد ضرب‌ها دارد، به همین دلیل شاهد بازدهی و عملکرد مطلوب الگوریتم FFT هستیم.

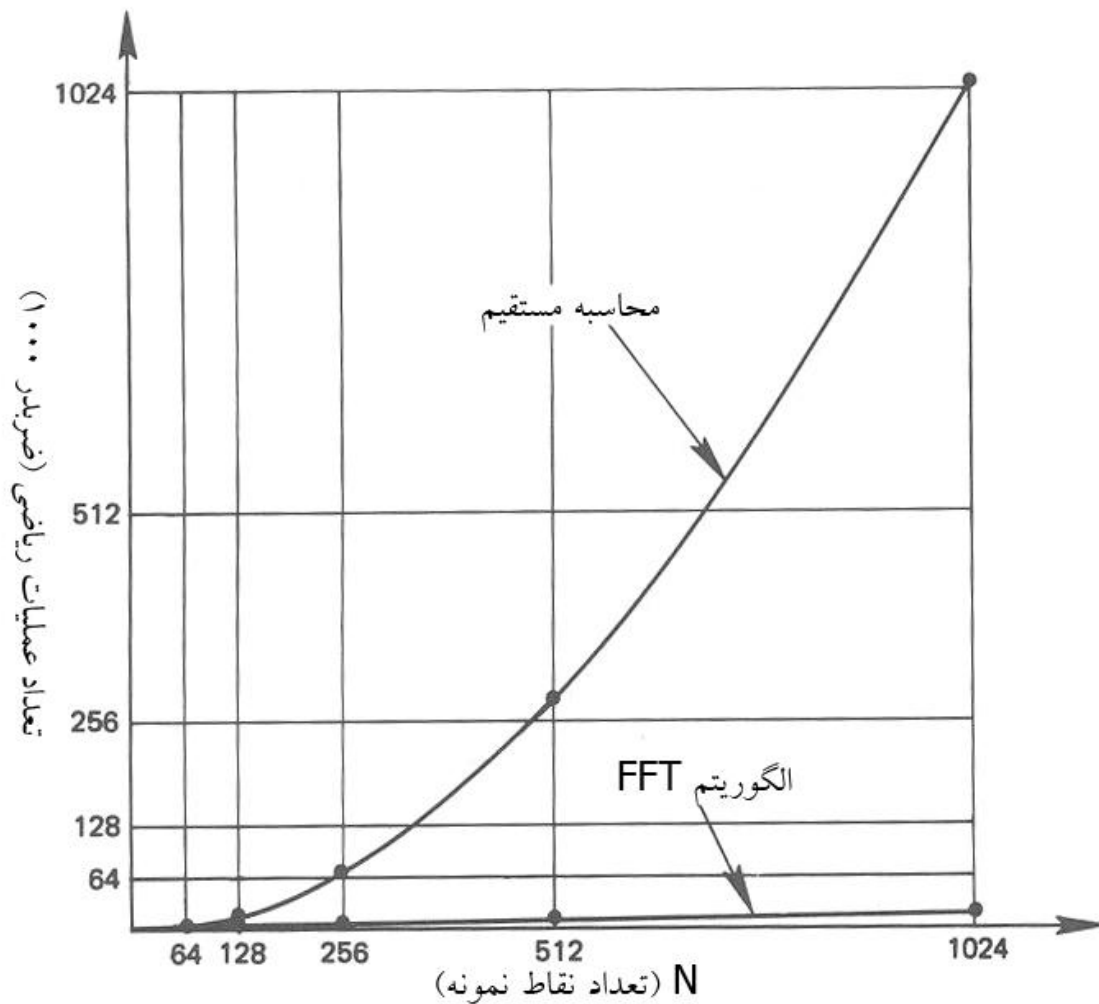
برای  $N = 2^{\gamma}$ ، الگوریتم FFT یک ماتریس عامل  $N \times N$  را به ماتریس‌های  $\gamma$  تبدیل می‌کند به طوری که هر یک از ماتریس‌های عامل یک ویژگی مشخصی را برای کم کردن تعداد ضرب‌ها و جمع‌های مختلط را داراست. با نگاهی به مثال قبل متوجه خواهیم شد که الگوریتم FFT تعداد  $\frac{N\gamma}{2} = 4$  ضرب مختلط و  $N\gamma$  جمع مختلط نیاز دارد در حالی که در روش مستقیم به  $N^2$  ضرب

مختلط و  $N(N-1)$  جمع مختلط نیاز دارد. اگر فرض کنیم که زمان محاسبه با تعداد ضربها متناسب باشد، نسبت تقریبی روش مستقیم به FFT از رابطه زیر به دست می آید.

$$\frac{N^2}{N\gamma/2} = \frac{2N}{\gamma} \quad (16-4)$$

برای  $N = 1024 = 2^{10}$  از رابطه ی فوق، سرعت الگوریتم FFT تقریباً ۲۰۰ برابر روش مستقیم به دست می آید. در شکل (۱-۴) تعداد ضربهای لازم در الگوریتم FFT را با تعداد ضرب در روش مستقیم مقایسه می کند. روش عامل سازی ماتریس یک اختلاف را نشان می دهد. طوری که معادله ی (۸.۹) به  $\bar{X}(n)$  منتج می شود نه  $X(n)$ .

$$(17-4) \quad \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} \quad \bar{X}(n) \text{ باید تبدیل شود به} \quad \begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix}$$



شکل (۴-۱): مقایسه تعداد ضرب‌های مورد نیاز در روش محاسباتی مستقیم و الگوریتم FFT

این اصلاح جزء لاینفک فرایند عامل‌سازی ماتریس به حساب می‌آید و به عنوان یک مشکل اصلی به شمار می‌رود. چرا که تکنیکی برای مرتب کردن  $\bar{X}(n)$  جهت رسیدن به  $X(n)$  قابل دسترس است. در  $X(n)$ ،  $n$  را با مقادیر هم‌ارز باینری جایگزین می‌نماییم.

(۴-۱۸)

$$\begin{bmatrix} X(00) \\ X(10) \\ X(01) \\ X(11) \end{bmatrix} \text{ تبدیل می شود به: } \begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix}$$

مشاهده می شود که اگر آرگومان های باینری معادله ی معکوس شوند (۰۱ به ۱۰ و ۱۰ به ۰۱ و....)

$$(۱۹-۴) \quad X(n) = \begin{bmatrix} X(00) \\ X(01) \\ X(10) \\ X(11) \end{bmatrix} \quad \bar{X}(n) = \begin{bmatrix} X(00) \\ X(10) \\ X(01) \\ X(11) \end{bmatrix} \quad \text{تبدیل می شود به:}$$

برای N بیشتر از ۴ توضیح فرایند عامل سازی ماتریس بسیار پرزحمت است. به همین دلیل معادله - ی (۹-۴) را به صورت گرافی تفسیر می کنیم. با استفاده از این فرمولاسیون گرافی می توانیم روش مناسب را جهت بررسی یک جریان گراف توسط یک برنامه ارائه دهیم.

#### ۶-۴- نمایش گرافیکی سیگنال-جریان

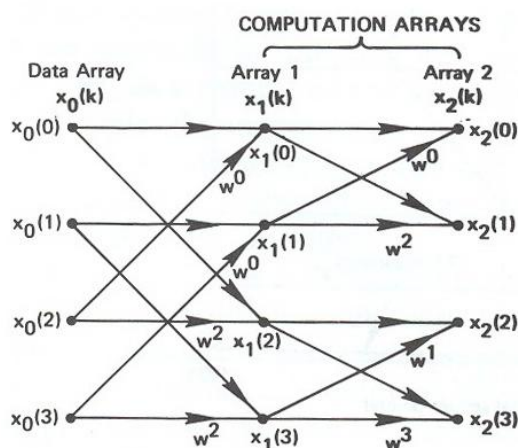
روش گرافیکی سیگنال-جریان ابزار گرافیکی و ریاضی قدرتمندی است که اغلب جهت تجزیه و تحلیل سیستم های کنترل به کار برده می شود. در اینجا ما از آن به عنوان روش مناسبی جهت توصیف ساختار الگوریتم FFT استفاده می کنیم.

در این مورد فقط چند قانون ساده وجود دارد که باید به خاطر سپرده شوند:

- ✓ اتصال دو خط به یکدیگر بیانگر یک عمل جمع است.
- ✓ وجود یک ضریب در نزدیکی یک خط نشان می دهد که مقداری توسط آن خط حمل می شود در آن ضرب خواهد شد.
- ✓ سیگنال ها همواره از سمت چپ به سمت راست جاری خواهند شد.

معادله ی (۹-۴) را به یک گراف جریان سیگنال تبدیل می کنیم که در شکل زیر نمایش داده شده است. آرایه های ماتریس ستونی  $x_0(k)$  در سمت چپ گراف ارائه شده اند. آرایه های ستون دوم

بردار  $x_1(k)$  محاسبه شده در (۴-۱۱) قرار داده شده‌اند. و آرایه‌های ستون بعدی بردار  $x_2(k)$  را معرفی می‌کند. به طور کلی این بردارها آرایه‌های محاسباتی  $\gamma$  خواهند بود که  $N=2^\gamma$ . گراف جریان سیگنال به صورت زیر تفسیر می‌شود که به هر نقطه دو خط نشان داده شده (مسیر انتقال) وارد شده است که از نقاط ستون قبلی خارج شده‌اند.



شکل (۴-۲): گراف جریان سیگنال FFT برای  $N=4$

یک مسیر مقداری را از آرایه‌ی اول انتقال می‌دهد و سپس آن را در  $W^p$  ضرب می‌کند و سپس مقدار به دست آمده را در آرایه‌ی بعدی وارد می‌کند.  $W^p$  نزدیک خطوط انتقال نمایش داده شده‌اند. در خطوطی که این مقدار نوشته نشده است مقدار  $W^p$  برابر با مقدار یک است. نهایتاً اینکه یک گره از دو مسیر جمع تشکیل شده است. برای توضیح و تفسیر گراف جریان سیگنال، به گره  $x_1(2)$  را در شکل (۴-۲) توجه کنید.

مطابق تفسیر گراف جریان سیگنال می‌توان نوشت:

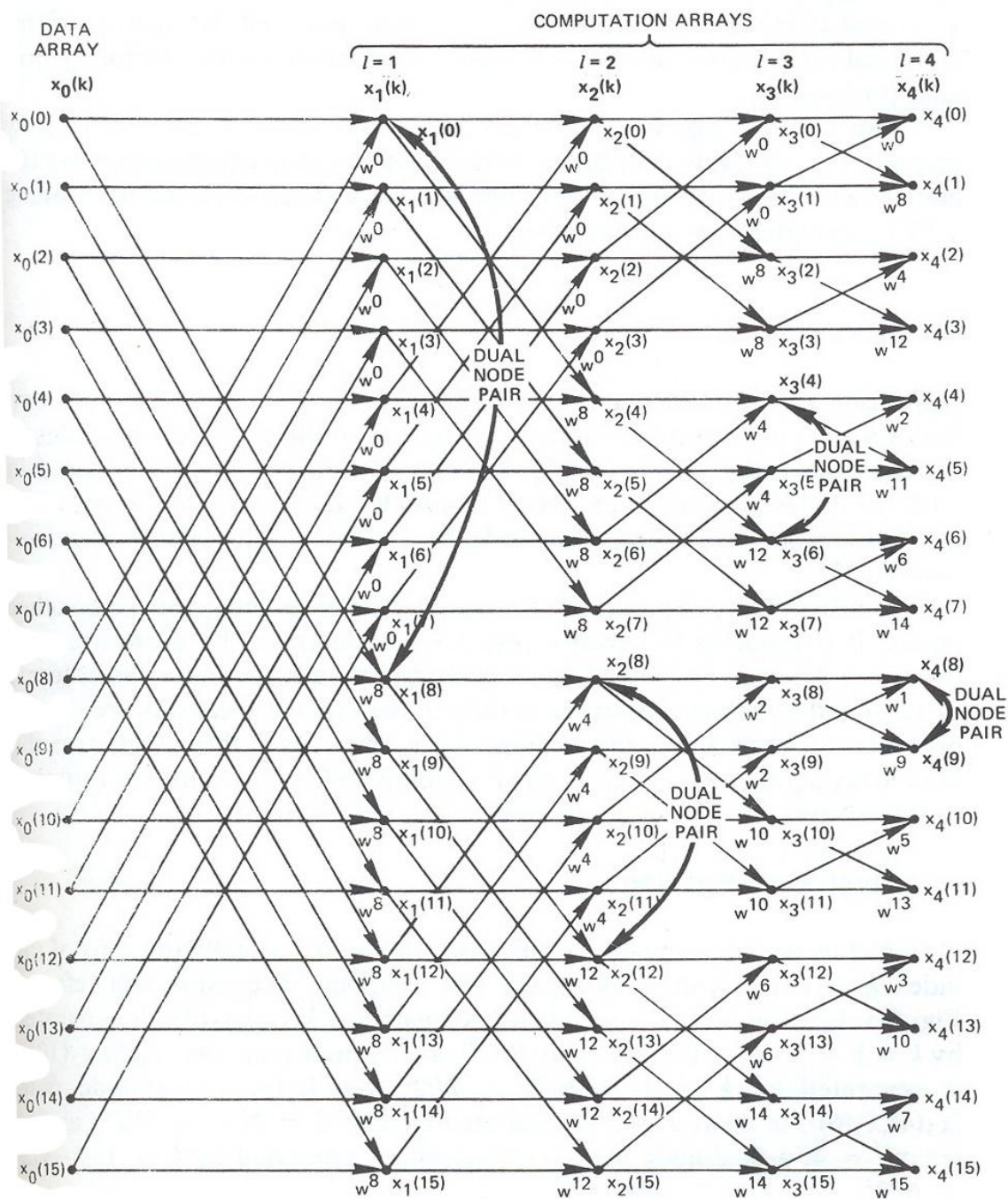
$$x_2(0) = x_1(0) + W^0 x_1(1) \quad (۴-۲۰)$$

که به سادگی از معادله (۴-۱۳) نیز حاصل شد. همه‌ی گره‌های موجود در گراف نیز به همین شکل به دست می‌آیند.

این روش، روش مختصری برای ارائه‌ی محاسبات لازم در ماتریس عامل الگوریتم FFT است. هر ستون محاسباتی گراف مطابق است با ماتریس عامل: تعداد  $\gamma$  آرایه‌های عمودی از  $N$  گره لازم است.

یادگیری و فهم این شیوه ارائه به ما این امکان را می‌دهد تا به سهولت فرایند ماتریس عامل‌سازی را توضیح می‌دهیم.

شکل (۳-۴) گراف جریان سیگنال را برای  $N=16$  نشان می‌دهد. یک گراف جریان این امکان را به ما می‌دهد که با توجه به ویژگیهای مربوط به فرایند ماتریس عامل‌سازی، قالبی را برای توسعه FFT فراهم می‌کند که فلوچارتی را برای ارائه‌ی یک برنامه کامپیوتری تهیه کنیم.



شکل (۴-۳): مثالی برای گره‌های دوگانه

## ۷-۴- گره های دوگانه

بررسی شکل (۴-۳) به وضوح مشخص می کند که در هر ستون همیشه می توانیم دو گره را بیابیم که مسیرهای انتقال داخلی از یک جفت گره همسان در ستون قبلی ناشی می شوند. گره های  $x_1(0)$  و  $x_1(8)$  از گره های  $x_0(0)$  و  $x_0(8)$  محاسبه می شوند. توجه کنیم که گره های  $x_0(0)$  و  $x_0(8)$  برای محاسبه ی دیگر گره ها به کار نمی روند. این چنین جفت گره هایی را جفت گره های دوتایی می نامیم. به خاطر اینکه محاسبه جفت گره دوتایی مستقل از گره های دیگر است، این امکان وجود دارد که محاسبات را در جا اجرا کنیم. برای نمایش و توضیح بیشتر از شکل (۴-۳) داریم که می توانیم ترمهای  $x_1(0)$  و  $x_1(8)$  را با ترمهای  $x_0(0)$  و  $x_0(8)$  همزمان محاسبه کنیم.

### ۱-۷-۴- گره های میان گره های دوگانه:

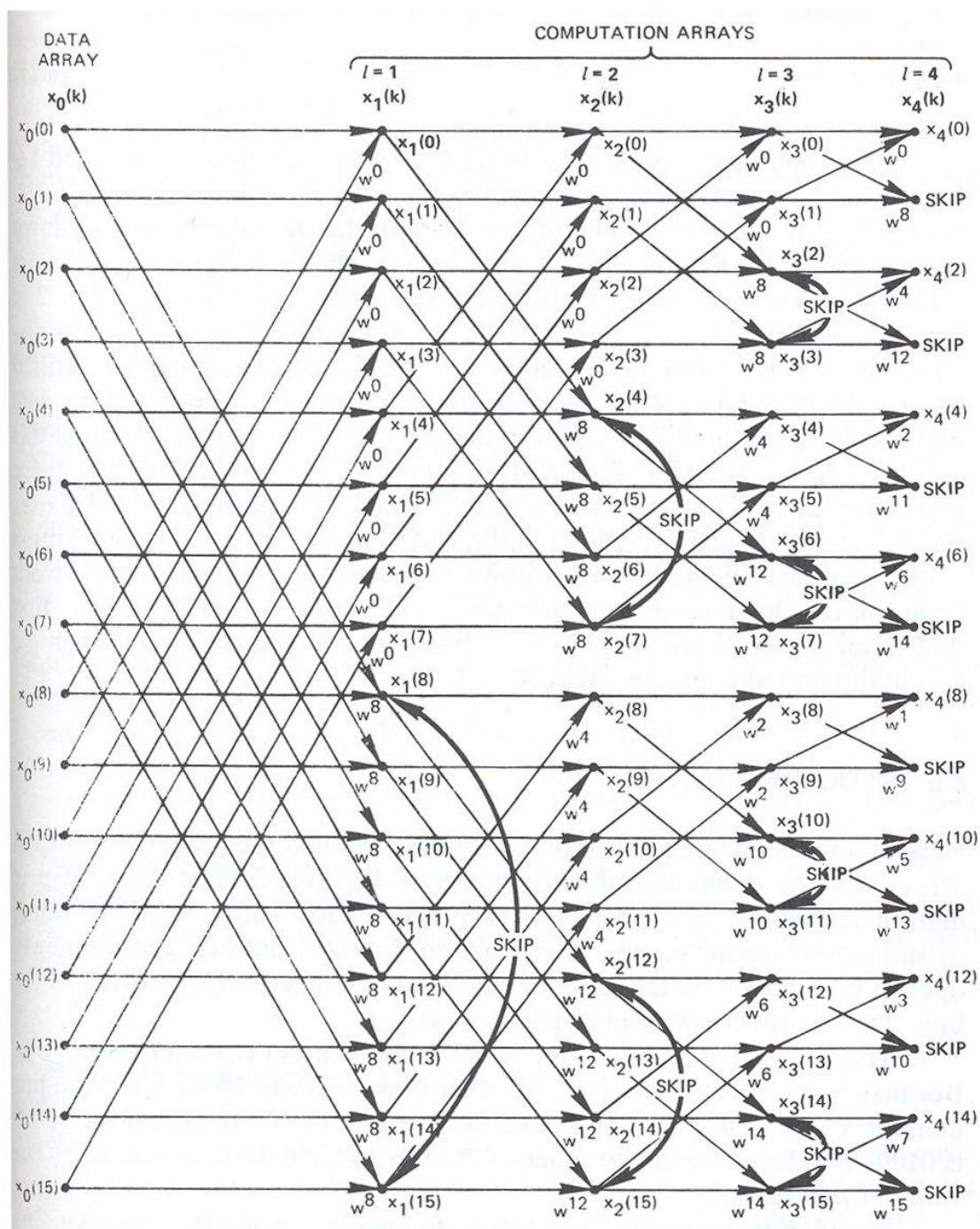
در این قسمت ترمهای عمودی نمای  $k$  بین یک جفت گره دوگانه را بررسی می کنیم. برای ادامه ی بحث به شکل (۴-۳) رجوع می کنیم. ابتدا در ستون  $l=1$  یک جفت گره دوگانه ی  $x_1(0)$  و  $x_1(8)$   $k=8=\frac{N}{2^1}=\frac{N}{2^1}$  فاصله دارند. در ستون دوم ( $l=2$ ) جفت دوگانه ی  $x_2(8)$  و  $x_2(12)$  از هم  $k=4=\frac{N}{2^2}=\frac{N}{2^2}$  فاصله دارند. به همین شکل در ستون سوم جفت گره دوگانه ی  $x_3(4)$  و  $x_3(6)$  با فاصله ی  $k=2=\frac{N}{2^3}=\frac{N}{2^3}$  از هم جدا شده اند. و در ستون چهارم جفت گره دوگانه ی  $x_4(8)$  و  $x_4(9)$  به تعداد  $k=1=\frac{N}{2^4}=\frac{N}{2^4}$  از یکدیگر فاصله دارند. در حالت کلی مشاهده می کنیم که فضای بین گره های دوگانه در ستون  $l$  با  $\frac{N}{2^l}$  داده شده است. بدین ترتیب اگر ما یک گره مشخص را در نظر بگیریم  $x_1(k)$ ، در نتیجه گره دوگانه آن  $x_1(k+\frac{N}{2^l})$  است. این ویژگی به ما این امکان را می دهد تا به راحتی یک جفت گره دوگانه را تشخیص دهیم.

## ۲-۷-۴- محاسبه گره‌های دوگانه

محاسبه‌ی جفت گره‌های دوگانه فقط به یک ضرب مختلط نیاز دارد. برای روشن شدن این مطلب، گره  $x_2(8)$  و دوگانه‌ی آن یعنی  $x_2(12)$ ، به عنوان مثال در شکل (۸.۳) نمایش داده شده‌اند، را در نظر بگیرید. مسیر انتقال ناشی از گره  $x_1(12)$  در  $W^4$  و  $W^{12}$  ضرب شده است. نکته‌ی بسیار مهم اینجا است که  $W^4 = -W^{12}$  و تنها یک ضرب مورد نیاز است. در حالت کلی اگر عامل وزنی در یک گره  $W^P$  باشد، در نتیجه عامل وزنی در گره دوگانه  $W^{P+\frac{N}{2}}$  است. به خاطر اینکه  $W^P = -W^{P+\frac{N}{2}}$  فقط یک ضرب برای محاسبه‌ی جفت گره دوگانه لازم است. محاسبه‌ی هر جفت گره دوگانه، با جفت رابطه‌ی زیر داده شده است.

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x_{l-1}(k) + W^P x_{l-1}\left(k + \frac{N}{2^l}\right) \\ x_1\left(k + \frac{N}{2^l}\right) &= x_{l-1}(k) - W^P x_{l-1}\left(k + \frac{N}{2^l}\right) \end{aligned} \quad (4-21)$$

در محاسبه هر ستون، از گره  $k=0$  شروع می‌کنیم و به ترتیب تا پایین ستون محاسبه‌ی جفت رابطه‌ی (۴-۲۱) را ادامه می‌دهیم. همانطور که قبلاً بیان شد، دوگانه‌ی هر گره در  $l$  امین ستون از  $\frac{N}{2^l}$  گره پایین‌تر یا بالاتر از گره مورد نظر به دست می‌آید. برای توضیح این نکته ستون  $l=2$  را در شکل (۴-۴) در نظر بگیرید. گره‌های دوگانه در  $k=4=\frac{N}{2^2}$  قرار داده شده‌اند که با بررسی شکل (۴-۴) صحت این مطلب تأیید می‌گردد.



شکل (۴-۴): مثالی از گره‌هایی که در محاسبات گراف جریان - سیگنال صرف نظر می‌شوند

با حرکت به سوی پایین در این ستون متوجه می‌شویم که گره همیشه ۴ گره با گره دو گانه‌اش فاصله دارد. پس محاسبات را از ابتدا تا گره چهارم در نظر می‌گیریم. از گره ۴ با گره‌هایی مواجه می‌-

#### ۸-۴- مشخص کردن $W^P$

(c) معکوس کردن بیت‌ها

شرکت مهندسی سورین توربو ماشین

$a_4 \times 2^3 + a_3 \times 2^2 + a_2 \times 2^1 + a_1 \times 2^0$  عدد معکوس شده‌ای که ما به دنبال توضیح آن هستیم اینگونه داده شده است.  $a_1 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_3 \times 2^1 + a_4 \times 2^0$ .

اگر بتوان روشی برای تعیین بیت‌های  $a_1$  و  $a_2$  و  $a_3$  و  $a_4$  به دست آورد توانسته‌ایم روشی برای عملیات معکوس کردن تعریف کنیم.

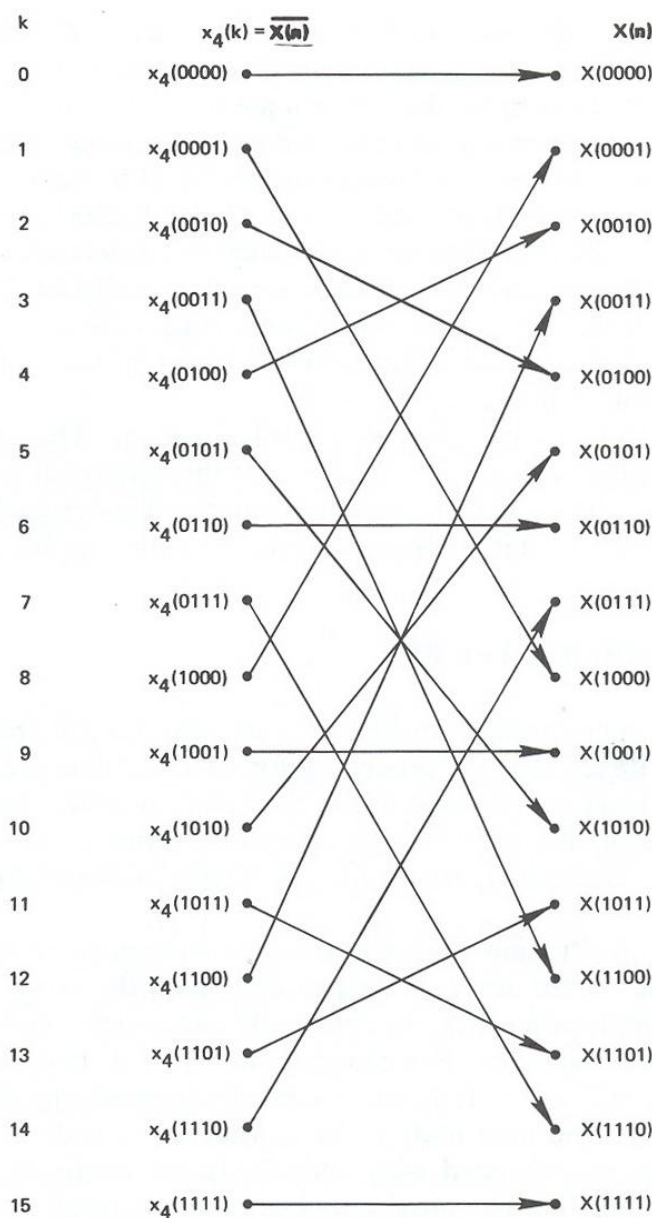
حال فرض می‌کنیم که  $M$  یک عدد باینری مساوی با  $a_4 a_3 a_2 a_1$  است. به راحتی می‌توان رابطه‌ی زیر را محاسبه کرد.  $(a_4 a_3 a_2 a_1 - 2(a_4 a_3 a_2))$ . اگر  $a_1$  برابر صفر باشد، این رابطه برابر صفر است و اگر برابر یک باشد، این عبارت نامساوی صفر است. با این تکنیک می‌توان تعیین کرد که  $a_1$  برابر صفر است یا خیر.

$a_2$  نیز با چنین عملیاتی تعیین می‌گردد. رابطه‌ی مقتضی برابر است با:  $(a_4 a_3 a_2 - 2(a_4 a_3))$ . اگر این اختلاف برابر صفر باشد، در نتیجه  $a_2$  برابر صفر است و در غیر اینصورت برابر ۱. بیت‌های  $a_3$  و  $a_4$  نیز به همین نحو قابل محاسبه‌اند. این روش پایه بررسی معکوس کردن بیت‌هاست که از آن در بخش ۸.۷ بهره گرفته‌ایم.

## ۹-۴- مرتب کردن FFT

گام نهایی محاسبه‌ی FFT، مرتب کردن نتایج شبیه به رابطه‌ی (۴-۱۹) است. به یاد داریم که روش مرتب کردن بردار  $\bar{X}(n)$  این بود که  $n$  را به صورت باینری می‌نویسیم و ارقام باینری را معکوس می‌کنیم. در شکل (۴-۵) این عملیات معکوس کردن بیت‌ها را نشان دادیم. ترم  $x_4(k)$  و  $x_4(i)$  به سادگی تعویض شده‌اند که  $i$  عدد صحیح مثبتی است که از معکوس کردن بیت‌های  $k$  به دست می‌آید. باید توجه کرد که وقتی مرتب کردن ستون‌ها را انجام می‌دهیم، شرایطی شبیه به مفهوم گره‌های دوگانه‌ی موجود می‌باشد. اگر در ستون‌ها از بالا تا پایین  $x(k)$  را با  $x(i)$  تعویض کنیم ممکن است که

گره اصلاحی قبلاً تغییر کرده باشد. برای مثال، در شکل (۴-۵) گره  $k=0$  بدون تغییر باقی می ماند. گره های ۱ و ۲ و ۳ با گره های ۸ و ۴ و ۱۲ تعویض شده اند. و اما برای گره ۴، می دانیم که این گره قبلاً با گره ۲ جایگزین شده است. برای حذف این امکان که گره ای برای بار دوم اصلاح نشود، به سادگی چک می کنیم که ببینیم آیا  $i$  کمتر از  $k$  است یا خیر. صحت این مطلب ما را متوجه می کند که گره قبلاً تغییر کرده است. با این چک می توانیم مطمئن شویم که روش مرتب سازی را به درستی انجام داده ایم یا خیر.

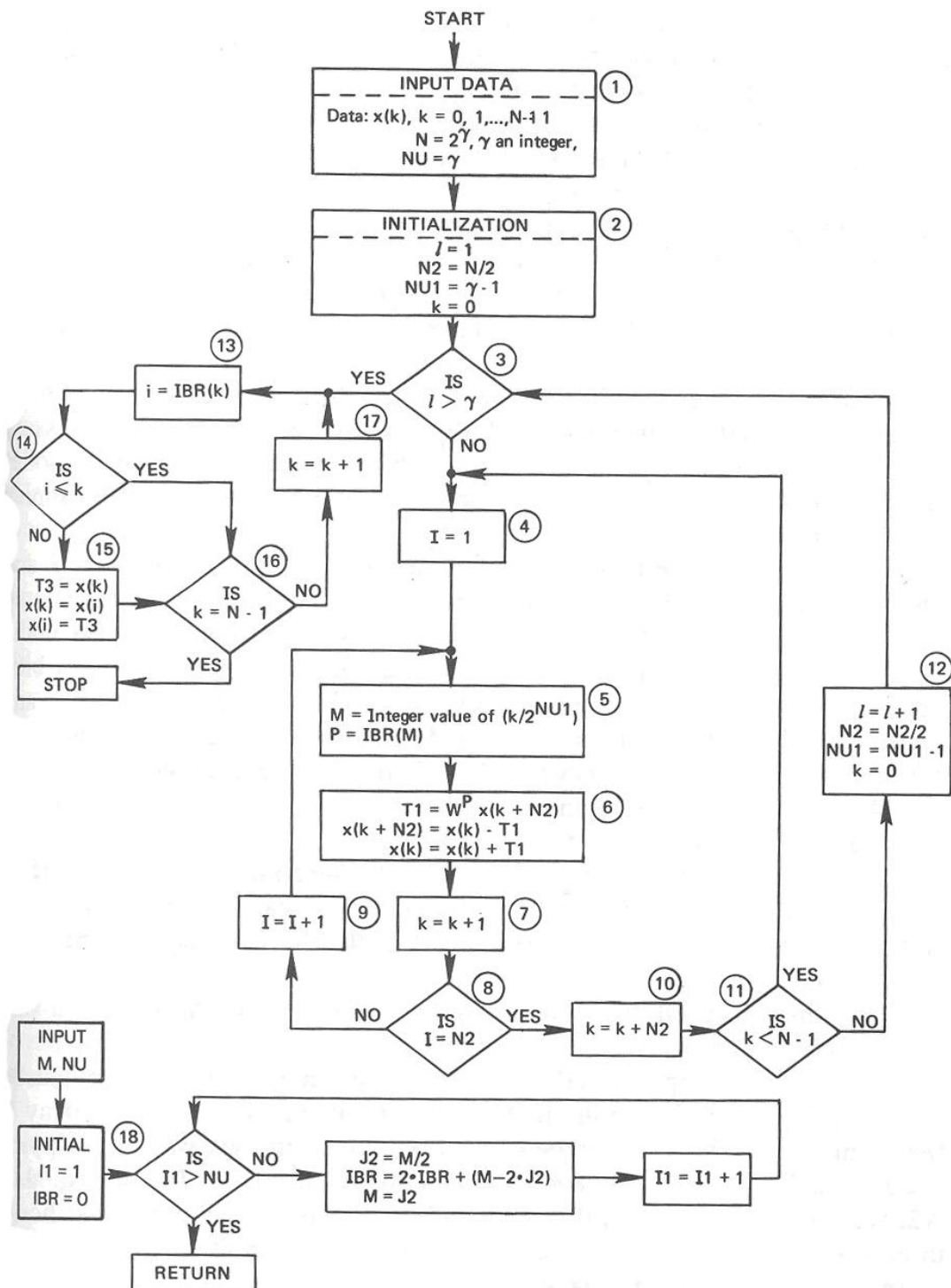


شکل (۴-۵): مثالی از عملیات معکوس کردن بیت‌ها برای  $N=16$

#### ۴-۱۰- فلو چارت محاسبه FFT

با استفاده از ویژگی‌های گراف جریان سیگنال که در بخش‌های قبل در مورد آنها بحث شد به راحتی می‌توانیم فلوچارتی را برای برنامه‌ی کامپیوتری الگوریتم تهیه و بررسی کنیم. از بحث‌های قبلی می‌دانیم که ابتدا ستون  $l=1$  را محاسبه می‌کنیم. با شروع از گره  $k=0$  و همینطور به ترتیب تا پایین

ستون  $l=1$  محاسبه را ادامه می‌دهیم. در گره  $k$  جفت معادله‌ی (۴-۲۱) را محاسبه می‌کنیم که  $p$  به وسیله‌ی روش توضیح داده شده مشخص می‌گردد. محاسبه‌ی آرایه‌های ستون‌ها را طبق (۴-۲۱) ادامه می‌دهیم تا به محدوده‌ای از گره‌ها برسیم که باید صرفنظر کرد. گره‌های مقتضی (مختص شده) را صرفنظر می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا آرایه‌های ورودی را محاسبه کنیم سپس با همان روش اقدام به محاسبه‌ی آرایه‌های باقیمانده می‌کنیم. ستون آخر را مرتب می‌کنیم تا نتایج مطلوب را به دست آوریم. شکل (۴-۶) فلوچارت برنامه کامپیوتری الگوریتم FFT را نشان می‌دهد.



شکل (۴-۶): فلوچارت برنامه کامپیوتری FFT

جعبه‌ی شماره‌ی ۱ داده‌های ورودی مورد نیاز را توضیح می‌دهد. فرض می‌شود بردار  $x(k)$  به صورت مختلط باشد و  $k=0,1,...,N-1$  اگر  $x(k)$  به صورت حقیقی باشد، قسمت موهومی باید صفر باشد. تعداد  $N$  نقطه نمونه باید رابطه‌ی  $N=2^\gamma$  را ارضا کند.  $\gamma$  مقدار صحیح مثبت است. مقداردهی اولیه‌ی پارامترهای مختلف برنامه در جعبه‌ی ۲ انجام شده است. پارامتر  $l$  که تعداد ستون‌هاست در نظر گرفته شده است. با ستون  $l=1$  آغاز می‌کنیم. فضا سازی بین گره‌های دوگانه با پارامتر  $N/2$  داده شده‌اند. برای  $l=1$  و  $N/2=N/2$  این چنین مقداردهی اولیه شده‌اند. پارامتر  $NU1$  متغیری است که هنگام مشخص کردن مقدار  $P$  استفاده می‌شود. مقدار اولیه‌ی  $NU1$  برابر  $\gamma-1$  است. آرگومان ستون  $k=0$  تعریف شده و از بالا تا پایین مقداردهی می‌کنیم.

جعبه‌ی شماره‌ی ۳ به این منظور تعبیه شده است که ستون  $l$  را طوری بررسی کند که از  $\gamma$  بزرگتر نباشد. اگر چنین باشد برنامه به جعبه شماره ۱۳ می‌رود تا نتایج محاسبه شده را با معکوس کردن مرتب کند. اگر همه‌ی ستون‌ها محاسبه نشده باشد سپس به جعبه‌ی شماره‌ی ۴ می‌رویم.

جعبه‌ی شماره‌ی ۴ به عنوان یک شمارنده قرار داده شده است. این شمارنده تعداد جفت گره‌های دوتایی را نشان می‌دهد. از بخش (۴-۷) به یاد داریم که لازم است صرفنظر کنیم از گره‌های معین تا اطمینان پیدا کنیم که گره‌های قبلی در نظر گرفته شده برای بار دوم محاسبه نمی‌شوند.

جعبه‌های ۵ و ۶ محاسبات معادله (۴-۲۱) را اجرا می‌کند. به خاطر اینکه  $k$  و  $l$  با ۰ و ۱ مقداردهی اولیه شده‌اند، به ترتیب به گره اولیه فرض شده به عنوان گره اول ستون اول است. جهت تعیین  $p$  برای این گره، به یاد داریم که به مقدار  $l$  عدد باینری  $k$  را به سمت راست جابه‌جا کنیم.

برای انجام این کار، ما مقدار صحیح مثبت  $\frac{k}{2^{\gamma-1}} = \frac{k}{NU1}$  را محاسبه می‌کنیم و نتیجه را در  $M$  قرار می‌دهیم. همانطور که در جعبه‌ی شماره‌ی ۶ نشان داده شده است طبق این روش برای معین کردن  $P$  ما باید بیت‌های  $M$  را معکوس کنیم که  $M$  توسط  $\gamma = NU$  ارائه داده شده است. تابع  $IBR(M)$  که در جعبه ۵ اشاره شده است یک تابع ویژه است که برای معکوس کردن بیت‌ها، مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روال بعداً توضیح داده خواهد شد.

جعبه‌ی شماره‌ی ۶، رابطه‌ی (۲۱-۴) است.  $W^P \times (k + N2)$  را محاسبه می‌کنیم و نتایج را به محل ذخیره‌ی موقتی انتقال می‌دهیم. جمع و تفریق این عبارت را طبق رابطه‌ی (۲۱-۴) انجام می‌دهیم. نتیجه‌ی خروجی، گره دوگانه است.

سپس تا پائین ستون، بقیه‌ی گره‌ها را به ترتیب طبق رابطه‌ی (۲۱-۴) محاسبه می‌کنیم. همانطور که در جعبه‌ی شماره‌ی ۷ نشان داده شده است  $k$  یک واحد اضافه گردیده است.

برای جلوگیری از محاسبه‌ی دوباره‌ی یک گره دوگانه که قبلاً در نظر گرفته شده است، جعبه‌ی ۸ شمارنده را چک می‌کند تا مساوی با  $N2$  باشد. برای ستون اول، تعداد گره‌هایی که می‌توانند به طور متوالی در نظر گرفته شوند، بدون صرفنظر کردن برابر  $N/2 = N2$  است. جعبه‌ی ۸ این شرایط را مشخص می‌کند. اگر  $I$  مساوی با  $N2$  نباشد، به گره بعدی می‌رویم و به شمارنده یکی اضافه می‌گردد. همانطور که در جعبه شماره ۹ نمایش داده شده است.

یادآوری می‌کنیم که اضافه کردن  $K$  را در جعبه‌ی شماره‌ی ۷ انجام داده‌ایم و دوباره جعبه‌های شماره‌ی ۵ و ۶ برای مقدار  $K$  جدید تکرار می‌شوند. اگر  $I = N2$  می‌فهمیم که این گره قبلاً در نظر گرفته شده است، و ما  $N2$  را با توجه به رابطه‌ی  $k = k + N2$  صرفنظر می‌کنیم. به خاطر اینکه  $k$  در جعبه‌ی ۷ به مقدار واحد افزایش یافته است، کافی است که گره‌هایی که قبلاً در نظر گرفته‌ایم را با مشخص کردن  $k$  به وسیله‌ی  $N2$  صرفنظر کنیم.

پیش از اینکه محاسبات مورد نیاز را در جعبه‌ی شماره‌ی ۵ و ۶ برای گره  $k = k + N2$  اجرا کنیم، باید ابتدا مطمئن شویم که از اندازه‌ی ستون تجاوز نکرده باشیم. همانطور که در جعبه‌ی شماره‌ی ۱۱ نشان داده شده است، اگر  $k$  کمتر از  $N-1$  باشد، شمارنده را در جعبه‌ی ۴ دو باره به مقدار ۱ باز می‌گردانیم و جعبه‌های ۵ و ۶ را تکرار می‌کنیم.

اگر در جعبه‌ی  $k > N-1$  می‌دانیم که باید به ستون بعدی برویم (جعبه‌ی ۱۲)، فاصله‌ی گره‌های دوگانه در ستون جدید به راحتی از رابطه‌ی  $N2/2$  به دست می‌آید (فاصله‌ی گره‌های دوگانه در هر ستون از رابطه‌ی  $\frac{N}{2}$  به دست می‌آید).  $NU1$  با مقدار ۱ مشخص شده است ( $NU1$  برابر  $1-\gamma$  است) و

مقدار  $k$  برابر صفر است. سپس، جعبه‌ی شماره‌ی ۳ را چک می‌کنیم تا ببینیم که همه‌ی ستون‌ها محاسبه شده‌اند یا خیر. اگر چنین بود نتایج نهایی را در مرحله‌ی آخر مرتب می‌کنیم. این کار در جعبه‌های ۱۳ تا ۱۷ انجام می‌گیرد.

جعبه‌ی ۱۳، بیت‌های  $k$  را معکوس می‌کند تا  $I$  بدست آید. دوباره تابع معکوس کردن بیت‌ها را ( $IBR(M)$ ) استفاده می‌کنیم.

برای مرتب کردن FFT با استفاده از جعبه‌ی شماره‌ی ۱۵،  $x(k)$  را با  $x(i)$  عوض می‌کنیم. پیش از ورود به جعبه‌ی ۱۵ لازم است طبق جعبه‌ی ۱۴، لازم است مشخص کنیم که  $i$  کمتر یا مساوی  $k$  است یا خیر. این کار برای این است که از تغییر دوباره‌ی گره‌های مرتب شده جلوگیری نماییم. جعبه‌ی شماره‌ی ۱۶ شامل شرطی است که گره‌های مرتب شده را بیان می‌کند و جعبه‌ی شماره‌ی ۱۷ یک شمارنده برای  $k$  است. جعبه‌ی شماره‌ی ۱۸ شیوه‌ی معکوس کردن بیت‌ها را (تابع  $IBR(M)$ ) توضیح داده است.

#### ۱۱-۴- برنامه کامپیوتری FFT توسط زبان‌های پاسکال و بیسیک

برنامه‌ی بیسیک فلوچارت شکل (۴-۶) که الگوریتم FFT را بیان می‌کند، در زیر ارائه شده است. این برنامه به صورت کامل ارائه نشده است بلکه طوری ارائه شده است که خواننده با طرز برنامه‌نویسی کامپیوتری الگوریتم FFT آشنا شود. برنامه کارآمدتر تا حدی نیز بر سرعت محاسبات موجب می‌گردد.

```
10000 REM:    FFT SUBROUTINE- THE CALLING PROGRAM SHOULD
10002 REM:    DIMENSION XREAL(I%) AND XIMAG(I%).
10004 REM:    N% AND NU% MUST BE INITIALIZED.
10010 N2% = N%/2
10020 NU1% = NU% - 1
10030 K% = 0
10040 FOR L% = 1 TO NU% STEP 1
```

شکل (۴-۷): کد بیسیک FFT

```

10050      FOR I% = 1 TO N2% STEP 1
10060          J% = K%\2^NU1%
10070          GOSUB 10410
10080          ARG = 6.283185# * IBITR%/N%
10090          C = COS(ARG)
10100          S = SIN(ARG)
10110          K1% = K% + 1
10120          K1N2% = K1% + N2%
10130          TREAL = XREAL(K1N2%) * C + XIMAG(K1N2%)*S
10140          TIMAG = XIMAG(K1N2%) * C - XREAL(K1N2%) * S
10150          XREAL(K1N2%) = XREAL(K1%) - TREAL
10160          XIMAG(K1N2%) = XIMAG(K1%) - TIMAG
10170          XREAL(K1%) = XREAL(K1%) + TREAL
10180          XIMAG(K1%) = XIMAG(K1%) + TIMAG
10190          K% = K% + 1
10200      NEXT I%
10210      K% = K% + N2%
10220      IF K%<N% GOTO 10050
10230      K% = 0
10240      NU1% = NU1% -1
10250      N2% = N2% / 2
10260 NEXT L%
10270 FOR K% = 1 TO N% STEP 1
10280     J% = K% - 1
10290     GOSUB 10410
10300     I% = IBITR% + 1
10310     IF(I%<=K%) GOTO 10380
10320     TREAL = XREAL(K%)
10330     TIMAG = XIMAG(K%)
10340     XREAL(K%) = XREAL(I%)
10350     XIMAG(K%) = XIMAG(I%)
10360     XREAL(I%) = TREAL
10370     XIMAG(I%) = TIMAG
10380 NEXT K%
10390 RETURN
10400 END
10410 REM: BIT REVERSAL SUB-ROUTINE
10420 J1% = J%
10430 IBITR% = 0
10440 FOR I1% = 1 TO NU% STEP 1
10450     J2% = J1%\2
10460     IBITR% = IBITR%*2 + (J1% - 2*J2%)
10470     J1% = J2%
10480 NEXT I1%
10490 RETURN
10500 END

```

شکل (۴-۸): ادامه کد بیسیک

در شکل (۹-۴) برنامه‌ی پاسکال بر مبنای فلوچارت شکل (۴-۶) نشان داده شده است.

```

TYPE REALARRAY=ARRAY[0..31] OF REAL;

FUNCTION IBITR (J,NU: INTEGER): INTEGER;
VAR I,J1,J2,K: INTEGER;
BEGIN
    J1 := J;
    K := 0;
    FOR I := 1 TO NU DO
    BEGIN
        J2 := J1 DIV 2;
        K := K*2+(J1-2*J2);
        J1 := J2
    END;
    IBITR := K
END; (IBITR)

PROCEDURE FFT (VAR XREAL,XIMAG: REALARRAY; N,NU: INTEGER);
VAR N2,NU1,I,L,K,M: INTEGER;
    TREAL,TIMAG,P,ARG,C,S: REAL;
LABEL LBL;
BEGIN
    N2 := N DIV 2;
    NU1 := NU-1;
    K := 0;
    FOR L := 1 TO NU DO
    BEGIN
        LBL:
        FOR I := 1 TO N2 DO
        BEGIN
            M := K DIV ROUND(EXP (NU1 * LN (2)));
            P := IBITR (M,NU);

```

شکل (۹-۴): کد پاسکال FFT

```

ARG := 6.283185*P/N;
C := COS (ARG);
S := SIN (ARG);
TREAL := XREAL[K+N2]*C+XIMAG[K+N2]*S;
TIMAG := XIMAG[K+N2]*C-XREAL[K+N2]*S;
XREAL[K+N2] := XREAL[K]-TREAL;
XIMAG[K+N2] := XIMAG[K]-TIMAG;
XREAL[K] := XREAL[K]+TREAL;
XIMAG[K] := XIMAG[K]+TIMAG;
K := K+1
END;
K := K+N2;
IF K<N THEN GOTO LBL;
K := 0;
NU1 := NU1-1;
N2 := N2 DIV 2
END;
FOR K := 0 TO N-1 DO
BEGIN
I := IBITR (K,NU);
IF I>K THEN
BEGIN
TREAL := XREAL[K];
TIMAG := XIMAG[K];
XREAL[K] := XREAL[I];
XIMAG[K] := XIMAG[I];
XREAL[I] := TREAL;
XIMAG[I] := TIMAG
END
END
END; {FFT}

```

شکل (۴-۱۰): ادامه کد پاسکال

## ۴-۱۲- بررسی نظری اساس الگوریتم FFT

در بخش (۴-۵) از یک بحث مفهومی برای فهم چگونگی FFT که از آن به عنوان یک الگوریتم بسیار مؤثر نام بردیم، استفاده کردیم. سپس برای توضیح الگوریتم، برای هر  $N = 2^r$  از گراف جریان-سیگنال استفاده کردیم. در این بخش، همه‌ی این مباحث را به پایه‌ی تئوری مرتبط می‌سازیم. ابتدا الگوریتم را برای  $N=4$  بررسی می‌کنیم و سپس این بحث را با  $N=8$  توسعه خواهیم داد. دلیل این بررسی‌ها برای موارد خاص این مطلب است که در نهایت، الگوریتم را برای  $N = 2^r$  استخراج می‌کنیم که  $r$  یک مقدار صحیح مثبت است.

### ۴-۱۲-۱- تعریف موضوع

رابطه‌ی تبدیل فوریه گسسته را در نظر بگیرید:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \quad (4-22)$$

مطلوب است که مقادیر  $n$  و  $k$  را به صورت باینری بیان کنیم. اگر  $N=4$  و در نتیجه  $r=2$  می‌توانیم  $k$  و  $n$  را به عنوان دو بیت باینری چنین ارائه کنیم.

$$k = (k_1 k_0) = 00, 01, 10, 11 \quad \text{یا} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$n = (n_1 n_0) = 00, 01, 10, 11 \quad \text{یا} \quad n = 0, 1, 2, 3$$

یک روش مفید نوشتن  $k$  و  $n$  به صورت زیر است.

$$n = 2n_1 + n_0 \quad k = 2k_1 + k_0 \quad (4-23)$$

به طوری که  $k_0$  و  $k_1$  و  $n_0$  و  $n_1$  می توانند مقادیر ۰ یا ۱ را اختیار کنند. روابط فوق روش ساده‌ای برای نوشتن اعداد باینری به شمار می‌روند. با ارائه‌ی این روابط می‌توان رابطه‌ی (۴-۲۲) را برای  $N=4$  به صورت زیر نوشت:

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} \quad (4-24)$$

باید دقت کنیم که یک حاصل جمع  $(\sum)$  در رابطه‌ی (۴-۲۲) به  $\gamma$  حاصل جمع  $(\sum)$  تبدیل شده است تا همه‌ی بیت‌های باینری ارائه شده‌ی  $k$  را شمارش کند.

## ۴-۱۲-۲- فاکتور گیری $W^P$

اکنون به عبارت  $W^P$  توجه کنید.  $W^{a+b} = W^a W^b$

$$\begin{aligned} W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} &= W^{(2n_1+n_0)2k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} \\ &= [W^{4n_1k_1}] W^{2n_0k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} \\ &= W^{2n_0k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} \end{aligned} \quad (4-25)$$

عبارت داخل براکت برابر واحد است.

$$W^{4n_1k_1} = [W^4]^{n_1k_1} = [e^{-j2\pi 4/4}]^{n_1k_1} = [1]^{n_1k_1} = 1$$

بنابراین می‌توان رابطه‌ی (۴-۲۴) را به شکل زیر نوشت:

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \left[ \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0k_1} \right] W^{(2n_1+n_0)k_0}$$

این رابطه، اساس الگوریتم FFT را ارائه می‌کند. برای اثبات این نکته، هر یک از حاصل جمع‌ها را  $(\sum)$  را به تنهایی در نظر می‌گیریم. ابتدا حاصل جمع داخل براکت را بازنویسی می‌کنیم.

$$x_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0k_1} \quad (4-28)$$

رابطه‌ی ارائه شده‌ی (۴-۲۸) را به فرم دستگاه معادلات می‌توان نوشت:

$$x_1(0,0) = x_0(0,0) + x_0(1,0)W^0 \quad (4-29)$$

$$x_1(0,1) = x_0(0,1) + x_0(1,1)W^0$$

$$x_1(1,0) = x_0(0,0) + x_0(1,0)W^2$$

$$x_1(1,1) = x_0(0,1) + x_0(1,1)W^2$$

و اگر روابط فوق را به شکل ماتریسی بازنویسی کنیم.

$$\begin{bmatrix} x_1(0,0) \\ x_1(0,1) \\ x_1(1,0) \\ x_1(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0,0) \\ x_0(0,1) \\ x_0(1,0) \\ x_0(1,1) \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

متوجه می‌شویم که این رابطه‌ی ماتریسی همان ماتریس عامل رابطه‌ی (۴-۱۱) است که در بخش (۴-۵) بررسی شد. بنابراین با نوشتن  $k$  به صورت باینری توانستیم  $\sum$  داخلی رابطه‌ی (۴-۲۷) را محاسبه کنیم، و یا ماتریس عامل اول برای مثال مطرح شده در بخش (۸.۲) به دست آمد و یا توانستیم آرایه‌های ستون اول گراف جریان سیگنال نشان داده شده در شکل (۸.۲) را بدست آوریم. به همین ترتیب اگر  $\sum$  خارجی را نیز بنویسیم.

$$x_2(n_0, n_1) = \sum_{k_1=0}^1 x_1(n_0, k_0) W^{(2n_1+n_0)k_0} \quad (4-31)$$

و نتایج را در فرم ماتریسی بیان کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x_2(0,0) \\ x_2(0,1) \\ x_2(1,0) \\ x_2(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0,0) \\ x_1(0,1) \\ x_1(1,0) \\ x_1(1,1) \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

که این رابطه همان رابطه ۸.۱۴ می باشد.

بنابر این  $\sum$  خارجی دومین ماتریس عامل مثال (۲-۴) را مشخص می کند. از رابطه های (۲۷-۴) و (۳۱-۴) داریم:

$$X(n_1, n_0) = x_2(n_0, n_1) \quad (4-33)$$

که این مطلب، نتیجه ی آخر  $x_2(n_0, n_1)$  است که از معکوس کردن بیت ها در  $\sum$  خارجی با توجه به مقادیر مطلوب  $X(n_0, n_1)$  به دست آمده است. این روش ساده با استفاده از الگوریتم FFT نتایج را به سرعت به دست می دهد.

اگر معادلات (۲۸-۴) و (۳۱-۴) و (۳۳-۴) را در کنار هم تشکیل دهیم:

$$\begin{aligned} x_1(n_0, k_0) &= \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1} \\ x_2(n_0, n_1) &= \sum_{k_1=0}^1 x_1(n_0, k_0) W^{(2n_1+n_0)k_0} \end{aligned} \quad (4-34)$$

$$X(n_1, n_0) = x_2(n_0, n_1)$$

مجموع این معادلات فرمولاسیون اصلی کولی-توکی الگوریتم FFT را ارائه می دهد.

در مثال بعدی معادلات کولی-توکی را برای  $N=8$  به دست می آوریم.

در فرمولاسیون FFT کولی-توکی برای  $N=2^3$  فرایند قبلی را اینگونه دنبال می کنیم:

$$n = 4n_2 + 2n_1 + n_0 \quad n_i = 0 \text{ or } 1$$

$$k = 4k_2 + 2k_1 + k_0 \quad k_i = 0 \text{ or } 1$$

رابطه ۸.۲۲ نیز چنین می شود:

$$X(n_2, n_1, n_0) = \sum_{k_0=1}^1 \sum_{k_1=0}^1 \left[ \sum_{k_2=0}^1 x_0(k_2, k_1, k_0) \right] W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)} \quad (4-36)$$

با باز نویسی  $W^P$  بدست می آوریم:

$$W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)} = W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2)} W^{(4n_2+2n_1+n_0)(2k_1)} W^{(4n_2+2n_1+n_0)(k_0)} \quad (4-37)$$

دقت کنیم به خاطر اینکه  $W^8 = [e^{j2\pi/8}]^8 = 1$  در نتیجه:

$$\begin{aligned} W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2)} &= (W^{8(n_2k_2+n_0)})(W^{8(n_1k_2)})W^{4n_0k_2} = W^{4n_0k_2} \\ W^{(4n_2+2n_1+n_0)(2k_1)} &= (W^{8(n_2k_1)})(W^{8(2n_1+n_0)(2k_1)}) = W^{(2n_1+n_0)(2k_1)} \end{aligned} \quad (4-38)$$

و در نتیجه می توان رابطه ی (۴-۳۶) را بازنویسی کرد:

$$X(n_2, n_1, n_0) = \sum_{k_0=1}^1 \sum_{k_0=0}^1 \left[ \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_2, k_1, k_0) \right] W^{(4n_0k_2)} W^{(2n_1+n_0)2k_1} W^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0} \quad (4-39)$$

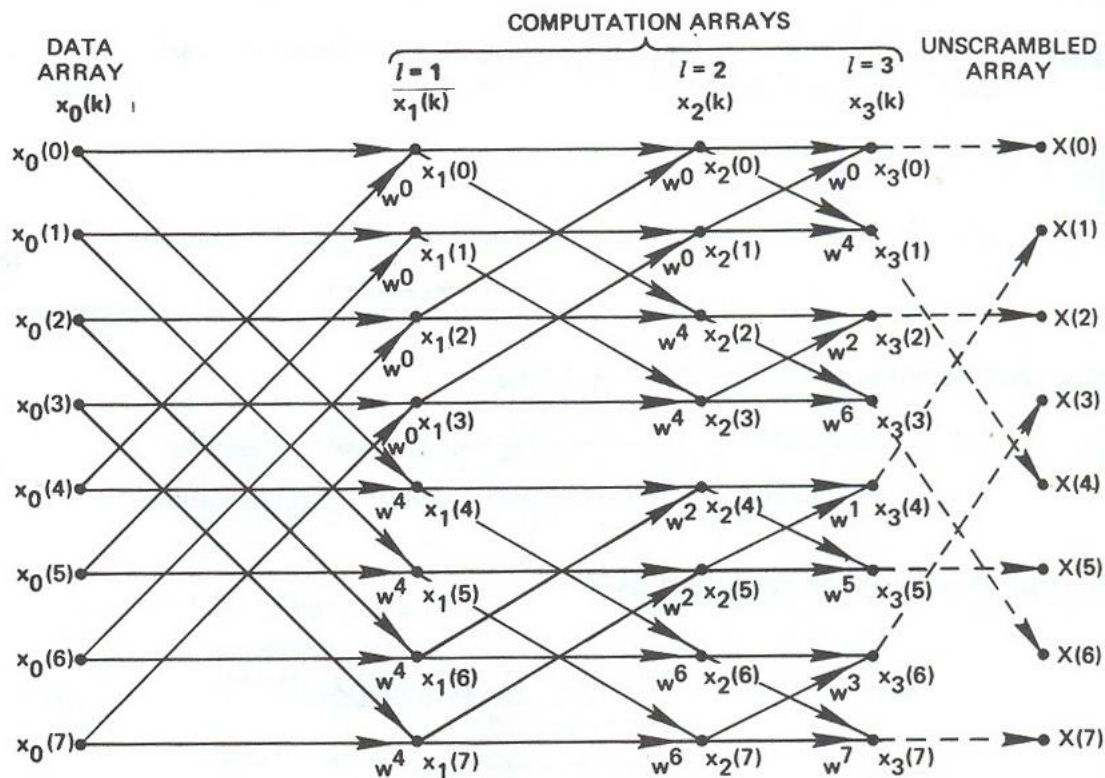
$$x_1(n_0, k_1, k_0) = \sum_{k_2=0}^1 x_0(k_2, k_1, k_0) W^{4n_0k_2} \quad (4-40)$$

$$x_2(n_0, n_1, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_1(n_0, k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)k_1} \quad (4-41)$$

$$x_2(n_0, n_1, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_1(n_0, k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)k_1} \quad (4-42)$$

$$X(n_2, n_1, n_0) = x_3(n_0, n_1, n_2) \quad (4-43)$$

پس ما توانستیم ماتریس های عامل مورد نیاز و همچنین گراف جریان سیگنال را برای  $N=8$  مشخص کردیم. گراف جریان سیگنال نیز در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل (۴-۱): گراف سیگنال-جریان FFT برای  $N=8$

### ۴-۱۳- الگوریتم کولی - توکی برای $N = 2^{\gamma}$

وقتی  $N = 2^{\gamma}$ ،  $n$  و  $k$  می‌تواند به شکل باینری زیر ارائه شود.

$$n = 2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots n_0 \quad (4-44)$$

$$k = 2^{\gamma-1}k_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}k_{\gamma-2} + \dots k_0$$

با این نحو ایانه معادله ۸.۲۲ را می‌توان اینگونه باز نویسی کرد:

$$X(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 [x_0(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0)] W^p \quad (4-45)$$

$$p = (2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots n_0) \times (2^{\gamma-1}k_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}k_{\gamma-2} + \dots k_0) \quad (4-46)$$

چون  $W^{a+b} = W^a W^b$  می‌توانیم  $W^p$  را به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} W^p &= W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+2^{\gamma-2}n_{\gamma-2}+\dots n_0)(2^{\gamma-1}k_{\gamma-1})} \\ &\times W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+2^{\gamma-2}n_{\gamma-2}+\dots n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})} \\ &\dots W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+2^{\gamma-2}n_{\gamma-2}+\dots n_0)k_0} \end{aligned} \quad (4-47)$$

اکنون عبارت اول از رابطه‌ی (4-47) به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+2^{\gamma-2}n_{\gamma-2}+\dots n_0)(2^{\gamma-1}k_{\gamma-1})} &= [W^{2^{\gamma}(2^{\gamma-2}n_{\gamma-1}k_{\gamma-1})}] \\ &\times [W^{2^{\gamma}(2^{\gamma-3}n_{\gamma-2}k_{\gamma-1})}] \\ &\times [W^{2^{\gamma}(n_1k_{\gamma-1})}] \\ &\times W^{2^{\gamma-1}(n_0k_{\gamma-1})} \\ &= W^{2^{\gamma-1}(n_0k_{\gamma-1})} \end{aligned}$$

به خاطر اینکه:

$$W^{2^{\gamma}} = W^N = [e^{j2\pi/N}]^N = 1 \quad (4-49)$$

به همین شکل ترم دوم رابطه‌ی (4-47) چنین به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+2^{\gamma-2}n_{\gamma-2}+\dots n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})} &= [(W^{2^{\gamma}(2^{\gamma-3}n_{\gamma-1}k_{\gamma-2})})] \\ &\times [(W^{2^{\gamma}(2^{\gamma-4}n_{\gamma-2}k_{\gamma-2})})] \\ &\times \dots W^{2^{\gamma-1}(n_1k_{\gamma-2})} \\ &\times W^{2^{\gamma-2}(n_0k_{\gamma-2})} \\ &= W^{(2n_1+n_0)2^{\gamma-2}k_{\gamma-2}} \end{aligned} \quad (4-50)$$

باید به این نکته دوباره متذکر شویم که عبارات داخل پرانتز برآیر یک می‌باشند (در مثال های ارائه شده قبل این مطلب اثبات گردیده است).

با انجام این عملیات تا آخرین عبارت و با استفاده از این روابط رابطه‌ی (۴-۴۵) را به صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد.

$$X(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 [x_0(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0)] \\ \times W^{2^{\gamma-1}(n_0 k_{\gamma-1})} W^{(2n_1+n_0)2^{\gamma-2} k_{\gamma-2}} \dots$$

(۴-۵۱)

$$\times W^{(2^{\gamma-1} n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} n_{\gamma-2} + \dots + n_0) k_0}$$

با اجرای جداگانه‌ی هر یک از این مجموع‌ها ( $\sum$ )، می‌توانیم ماتریس‌های عامل میانی را به دست آوریم:

$$x_1(n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) = \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 x_0(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) W^{(2^{\gamma-1})(n_0 k_{\gamma-1})}$$

$$x_2(n_0, n_1, k_{\gamma-3}, \dots, k_0) = \sum_{k_{\gamma-2}=0}^1 x_1(n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) W^{(2n_1+n_0)(2^{\gamma-2} k_{\gamma-2})}$$

.

.

.

$$x_{\gamma}(n_0, n_1, \dots, n_{\gamma-1}) = \sum_{k_0=0}^1 x_{\gamma-1}(n_0, n_1, \dots, k_0) W^{(2^{\gamma-1} n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} n_{\gamma-2} + \dots + n_0) k_0}$$

$$X(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_0) = x_{\gamma}(n_0, n_1, \dots, n_{\gamma-1})$$

این معادلات فرمولاسیون کولی-توکی برای الگوریتم FFT است. بیان شد که محاسبات مستقیم برای  $N$  گره تقریباً به  $N^2$  ضرب مختلط نیاز دارد.

اکنون تعداد ضرب‌های لازم برای محاسبه‌ی رابطه‌ی (۴-۵۲) را به دست می‌آوریم. تعداد  $\gamma$  رابطه‌ی  $\sum$  وجود دارد که هر یک  $N$  معادله را ارائه می‌کنند. هر یک از آنها شامل دو ضرب مختلط هستند. اولین ضرب هر معادله در اصل ضرب در واحد است چرا که ضرب اول همیشه به شکل

$W^{ak_{\gamma-i}}$ ، که  $k_{\gamma-i}$  برابر صفر است. بدین ترتیب فقط  $N\gamma$  ضرب مختلط نیاز است. می توان نشان داد که در محاسبه ی ستون ها این رابطه برقرار است:

$$W^P = -W^{P+\frac{N}{2}}$$

تعداد ضربها به نصف کاهش می یابد و در نتیجه تعداد ضربها برای  $N=2^r$  برابر است با:  $N\gamma/2$ . به همین ترتیب اثبات می شود که  $N\gamma$  جمع مختلط نیز برای محاسبات مورد نیاز است.

انواع مختلف دیگری از الگوریتم FFT نیز مطرح است که با توجه به یک سری ویژگی های مختلف و کاربردی FFT تعریف می شوند. همچون الگوریتم سندی-توکی و همچنین الگوریتم کولی توکی با  $N$  های اختیاری، که در این مجال از آنها صرف نظر کرده ایم.

## مراجع

[1] Brigham, Oran E. **The FAST FOURIER TRANSFORM**. 2<sup>nd</sup> ed. New Jersey: Englewood Cliffs, 1988

[2] Ramiraz, Robert W. **The FFT: Fundamentals and Concepts**. 1<sup>st</sup> ed. New Jersey: Englewood Cliffs, 1985

[۳] پیترز، تری؛ ویلیامز، جکی. تبدیل فوری و کاربردهای آن در مهندسی پزشکی. ترجمه‌ی ستاره-

دان، سیدکمال‌الدین؛ بهنام، حمید. چاپ اول. تهران: انتشارات وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی، ۱۳۸۳